

UNIVERSIDAD DE SANTANDER

ESCUELA TECNICA SUPERIOR DE INGENIEROS

DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS

DEPARTAMENTO DE ANALISIS DE LAS ESTRUCTURAS

CATEDRA DE CALCULO DE ESTRUCTURAS

CALCULO DE ESTRUCTURAS CONTINUAS

Volúmen 1- Métodos generales

Estructuras 1-D y 2-D

PUBLICACION : AS - 80.8

**AVELINO SAMARTIN GUIROSA
JOSE R. GONZALEZ DE CANGAS**

1980

INDICE

Introducción.....	7
Plan del curso.....	10
1. Conceptos fundamentales en el cálculo de estruc <u>turas</u>	14
1.1. Introducción.....	14
1.2. Estructuras y elementos estructurales.....	16
1.2.1. Estructura.....	16
1.2.2. Elementos estructurales.....	18
1.3. Concepto de grado de libertad.....	19
1.4. Magnitudes.....	21
1.4.1. Estáticas.....	21
1.4.2. Cinemáticas.....	22
1.5. Tipos de ecuaciones.....	23
1.6. Métodos de análisis de estructuras.....	24
1.7. Tipos de estructuras.....	27
1.7.1. Primera clasificación.....	27
1.7.2. Segunda clasificación.....	29
1.7.3. Tercera clasificación.....	29
1.7.4. Cuarta clasificación.....	30
2. Tipos de planteamiento.....	30

3. Técnicas de resolución.....	43
3.1. Técnicas de resolución directa de la ecuación diferencial.....	43
3.2. Método de superposición.....	49
3.3. Técnicas de resolución de la ecuación diferencial utilizando la función de Green.....	55
3.4. Soluciones en serie.....	59
3.4.1. Solución de Navier.....	59
3.4.2. Solución generalizada de Navier.....	64
3.4.3. Desarrollo en serie de la función de Green.....	75
3.4.4. Solución particular y solución complementaria.....	77
3.5. Técnicas de resolución indirecta de la ecuación diferencial.....	80
3.5.1. Método de Payleigh-Ritz.....	80
3.5.2. Método de las funciones a trozos: Elementos Finitos.....	87
3.5.3. Método de Galerkin.....	93
3.5.4. Método de funciones pesantes.....	97
3.5.5. Método de colocación.....	97
3.5.6. Método de las regiones.....	99
3.5.7. Métodos de Trefft y de la integral de contorno.....	101
3.5.8. Método de los MINIMOS CUADRADOS.....	101

4. Estructuras 2-D.....	104
4.1. Teoría lineal de placas a flexión.....	104
4.1.1. Definiciones y tipos de esfuerzos actuales.....	104
4.1.2. Fuerzas exteriores.....	106
4.1.3. Ecuación diferencial de la placa.	106
4.1.4. Obtención de esfuerzos y reaccio- nes de Kirchhoff.....	116
4.1.5. Comentarios sobre las condiciones de contorno.....	117
4.1.6. Consideración de cargas dinámicas y fundación elástica.....	118
4.2. Estudio de la placa en extensión: efecto laja.....	120
4.2.1. Definición de esfuerzos y accio- nes externas.....	120
4.2.2. Ecuación diferencial de la laja..	121
4.2.3. Analogía entre extensión y fle- xión.....	126
4.3. Planteamiento de placas con extensión co nocida.....	128
4.3.1. Introducción.....	128
4.3.2. Desarrollo del problema.....	128
4.3.3. Cargas dinámicas y fundación elás tica.....	131
4.4. Métodos directos de resolución.....	131

4.4.1. Método de Navier para el cálculo de placas.....	132
4.4.2. Método de Navier en el caso de que existan compresiones conocidas.....	134
4.4.3. Método de Navier para el caso de considerar pandeo y fuerzas diná micas.....	136
4.4.4. Solución de Navier generalizada: funciones de Rayleigh.....	139
4.4.5. Solución de Maurice-Levy.....	144
4.5. Métodos indirectos de resolución.....	149
4.5.1. Introducción.....	149
4.5.2. Método de Kantarovich.....	152
5. Lámina plegada.....	154
5.1. Introducción.....	154
5.2. Análisis como placa: matriz de rigidez....	155
5.3. Análisis como placa: cálculo de la solu- ción inicial.....	163
5.4. Análisis como placa: expresión del vector resultante.....	166
5.5. Análisis como laja: matriz de rigidez.....	169
5.6. Análisis como laja: vector resultante.....	171
5.7. Matriz de rigidez de la lámina plegada....	172
5.8. Lámina plegada con elementos "viga".....	173
5.8.1. Introducción.....	173

5.8.2. Matriz de rigidez de la viga.....	174
5.8.3. Expresión de los esfuerzos.....	176
5.8.4. Ensamblaje.....	178
5.9. Esquema de un programa de cálculo.....	178
5.10. Introducción, en el cálculo, de las compresio- nes en la placa.....	178
6. Técnicas numéricas de resolución de problemas estruc- turales en los que aparecen derivada parciales.....	
6.1. Introducción: ejemplo de aplicación.....	181
6.2. Método de colocación.....	183
6.3. Método de las regiones.....	185
6.4. Método de Galerkin.....	188
6.5. Método de los mínimos cuadrados.....	189
6.6. Método de aproximación de contorno.....	190
6.6.1. Método de colocación en el contorno.....	193
6.6.2. Método de las regiones en el contorno...	195
6.6.3. Método de Galerkin en el contorno.....	198
6.6.4. Método de los mínimos cuadrados en el contorno.....	200
6.7. El método de la integral de contorno da resul- tados de menor rigidez.....	201
6.8. Comparación de los métodos de fuerzas y de com- patibilidad.....	203
6.8.1. Método de los desplazamientos o de equi- librio.....	204
6.8.2. Método de las fuerzas y de compacibili- dad.....	204

6.9. Solución al problema de la torsión mediante el planteamiento variacional en el contorno..	205
6.9.1. Solución de Navier para distintos casos.....	208
6.9.2. Método de Kantarovich.....	210
6.9.3. Método de Kantarovich en la ecuación diferencial de la torsión. Aplicación de Galerkin.....	213
6.9.4. Método de Kantarovich. Aplicación del método de colocación por líneas.....	223
6.9.5. Método de Kantarovich. Aplicación del método de las regiones.....	226
6.9.6. Método de Kantarovich. Aplicación de otros métodos.....	228

INTRODUCCION

Estas notas, que se publican en dos tomos, han surgido como resultado de las clases de Doctorado que, durante el curso académico 1979-80, he impartido en la Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos de la Universidad de Santander.

El objetivo del curso era ambicioso ya que se intentaban presentar, de un modo panorámico, los distintos procedimientos analíticos y semianalíticos de Cálculo de Estructuras así como su aplicación al análisis efectivo de diferentes casos prácticos: vigas, placas y láminas.

El Profesor José Ramón González de Cangas, asistente al curso, recogió las notas que, tras haber sido comentadas y revisadas, sirvieron de base a esta publicación. Su trabajo ha sido eficiente y entusiasta en todo momento, resolviendo problemas propuestos y comprobando la solución de numerosos ejemplos de clase. Sin duda merece, con toda justicia, figurar como coautor del trabajo.

Además tenemos que agradecer la colaboración del Profesor Javier Torres Ruiz, que, con su eficaz

ayuda, ha permitido mejorar extraordinariamente el contenido del capítulo 6.

También damos las gracias a los demás asistentes al curso, y, en particular, al Profesor Carlos Alonso Cobo, que han ayudado en la redacción material de estas notas.

La publicación que se presenta corresponde a la primera parte del Curso, referente a los métodos generales de cálculo y su aplicación a casos sencillos: estructuras 1-D y 2-D. También se incluye, en el capítulo 5, una combinación natural de elementos 2-D -laja y placa-, correspondiente a la lámina plegada. Se deja para un segundo volumen el estudio de otras estructuras laminares específicas, así como la introducción a la teoría general de láminas.

A lo largo del curso -y en estas notas se refleja- se ha intentado mostrar la identidad de la metodología existente en todo el cálculo estructural, desde la estructura más simple -columna- a la más compleja -lámina-, tanto en su planteamiento como en su resolución.

Con esta publicación se desea -aparte de cubrir un evidente vacío bibliográfico, en nuestra len-

gua, sobre el tema- impulsar el uso de los diferentes mé
todos analíticos que actualmente existen y que, por cau-
sas bien conocidas -facilidad de computación- han sido,
a nuestro entender, inmerecidamente relegados al olvido,
cuando podrían, muchas veces, sustituir, o al menos com-
plementar, otras técnicas numéricas más potentes.

Avelino Samartín Quiroga

PLAN DEL CURSO

El curso se estructura en los siguientes apartados:

- Estudio de la viga: extensión y flexión.
- Estudio de la placa: extensión y flexión.
- Estudio de la lámina: láminas cilíndricas, de doble curvatura y revolución.
- Teoría general de láminas.

Dentro de cada tipo de estructura se hará un planteamiento del problema y, a continuación, se indicarán distintas técnicas de resolución. Tanto uno como otras se dividirán en dos grandes grupos:

- Métodos directos.
- Métodos indirectos.

Los primeros se basan en consideraciones locales (equilibrio, compatibilidad, etc.) a nivel diferencial. En los métodos indirectos se utilizan técnicas energéticas, es decir, basadas en la energía complementaria, energía total o principios variacionales (funcional de Reissner, Washizu, etc.).

En cuanto a la bibliografía se comentan a continuación algunos textos clásicos. En general, los autores alemanes y rusos son más afines a los planteamientos y soluciones directos; en cambio, la moderna escuela anglosajona utiliza procedimientos indirectos.

Bibliografía

- 1) TIMOSCHENKO & WOINOWSKY-KRIEGER. "Theory of Plates and Shells". McGraw-Hill Book. Co., New York, 1959.
(Es un libro muy elemental y sólo recomendable como iniciación).
- 2) FLÜGGE, W. "Stresses in Shells". Springer Verlag. Berlín, 1960. (Es un libro muy bueno, a pesar de su ya lejana publicación, y está orientado al cálculo, y dedicado a láminas y membranas. Un defecto que se le puede achacar es el de no plantear la teoría general de láminas).
- 3) BILLINGTON, D.P. "Thin Shell Concrete Structures" McGraw-Hill Book Co., New York, 1965. (Libro muy sencillo, con muchas fotos y detalles constructivos).
- 4) GOLDENVEIZER, A.L. "Theory of Elastic Thin Shells".

- Pergamon Press Ltd. New York, 1961. (Es un libro muy matemático, de lectura difícil. El mejor, desde ese punto de vista).
- 5) NOVOZHILOV, V.V. "The Theory of Thin Shells". P. Noordhoff Ltd. Holanda, 1959. (Buen libro, también matemático, y más sencillo que el anterior).
 - 6) VLAZOV, V.Z. "General Theory of Shells and its Application in Engineering" NASA, T.F.T. 99, - 1964. (Existe traducido del ruso en la publicación aquí incluida. Está en línea con el anterior).
 - 7) RAMASWAMY, G.S. "Design and Construction of Concrete Shell Roofs". McGraw-Hill Book Co. New York, 1968. (Libro sencillo y recomendable; presenta ejemplos completos y da indicaciones para proyecto).
 - 8) KRAUS, H. "Thin Elastic Shells". John Wiley and Sons Ltd. New York, 1967. (Es muy completo respecto a láminas de revolución, en sus aspectos estáticos, dinámicos e inestabilidad).
 - 9) GIBSON, J.E. "The Design of Shell Roofs" Spon Ltd. Londres, 1968 (libro elemental).

- 10) JENKINS, R.S. "Theory and Design of Cylindrical Shell Structures" O.N. Arup Group. Londres, 1947 (merece destacarse desde un punto de vista histórico. Introduce técnicas matriciales - en el cálculo de cadenas de láminas cilíndricas).

1. CONCEPTOS FUNDAMENTALES EN EL CALCULO DE ESTRUCTURAS

1.1. INTRODUCCION

Las contrucciones ingenieriles tienen una característica común, que es la de su existencia y durabilidad a lo largo del tiempo.

El objetivo del Cálculo de Estructuras es el de lograr esa característica común.

En el proyecto de una estructura existen tres fases perfectamente diferenciadas:

1) Idealización de la realidad, mediante un modelo matemático que simule el comportamiento de la construcción real.

2) Cálculo del modelo.

3) Interpretación de los resultados.

En lo que se refiere al cálculo, cabe distinguir tres aspectos:

a) Análisis: A partir de unas acciones conocidas y de una estructura totalmente definida, se obtienen unos resultados.

b) Síntesis: Se conocen las acciones, pero la estructura no está totalmente definida, pudiendo variar su geometría o las características de los materiales constituyentes, con un objetivo determinado (función objetivo), como puede ser, por ejemplo, el coste mínimo.

c) Identificación: La limitación más grande que existe hoy en día en la Ingeniería Civil corresponde al desconocimiento de los materiales. La tendencia actual es la comparación de los resultados obtenidos por dos caminos distintos: Modelo matemático y ensayo en la estructura completa.

Si, por ejemplo, se quiere asignar un valor al módulo de elasticidad, se parte de una hipótesis:

$$E = a_i \sigma^2 + b_i \sigma + c_i$$

siendo a_i , b_i y c_i parámetros desconocidos, y se obtienen unos resultados, los cuales son comparados con los obtenidos mediante un ensayo de la estructura completa, sometida a las acciones correspondientes. Si se designa por V_{ci} al valor calculado de un cierto resultado, mediante el modelo matemático de partida y por V_{mi} al valor medido en el ensayo del mismo resultado, se hace mínima la expresión:

$$\sum_i |V_{ci} - V_{mi}|^2$$

determinándose los parámetros a_i , b_i y c_i .

Los ensayos convencionales en probetas del material de que está hecha la estructura quedan superados, ya que el comportamiento de dicho material puede ser muy distinto al considerar la estructura en su conjunto, en lugar de una probeta de dimensiones reducidas. A simple vista -- puede parecer que el procedimiento citado resulta demasiado costoso, al exigir un ensayo para cada obra a realizar. Sin embargo, el método consiste en hacer un muestreo entre obras ya realizadas, y mediante extrapolación deducir consecuencias por cualquier otra obra análoga.

1.2. ESTRUCTURAS Y ELEMENTOS ESTRUCTURALES

1.2.1. Estructura

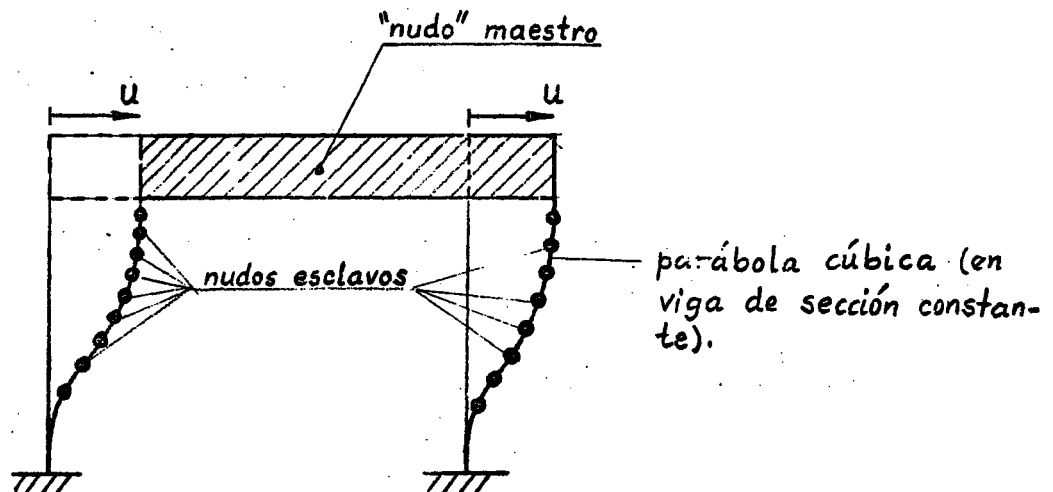
Se define una estructura como un conjunto de puntos materiales enlazados entre sí, mediante unas fuerzas - de atracción molecular.

Según el número de puntos materiales, las estructuras pueden ser:

- Discretas: Constituidas por un n^2 finito de puntos materiales.
- Continuas: constituidas por un n^2 infinito de puntos materiales.

Según el tipo de elementos estructurales este número infinito puede ser: ∞ , ∞^2 ó ∞^3 .

Naturalmente, los sistemas continuos se acercan mejor a la realidad que los discretos, aunque sean estos - últimos los más usados. Esto es debido a la existencia de nudos esclavos y nudos maestros, que arrastran en su comportamiento a los anteriores:



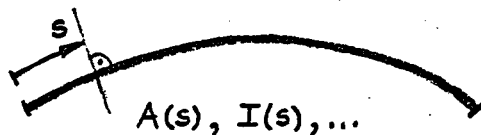
1.2.2. Elementos estructurales

Una estructura se puede considerar como un ensamblaje de estructuras más simples o elementales que reciben el nombre de elementos estructurales.

Los tipos de elementos más sencillos son:

- El punto o elemento cero dimensional (0-D).

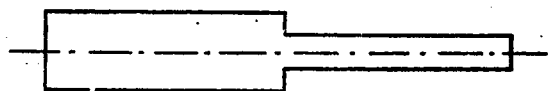
- La línea o elemento mono-dimensional (1-D). Este tipo de elementos aparece en la realidad cuando una dimensión es predominante respecto de las otras dos. Dicha dimensión es el lugar geométrico de los centros de gravedad de las secciones normales. Las características mecánicas, tales como el área $\{A(s)\}$, inercia $\{I(s)\}$, en un punto genérico definido por el parámetro fundamental (s) , corresponden a dichas secciones normales:



Dos ejemplos de elementos monodimensionales pueden verse en las figuras siguientes:

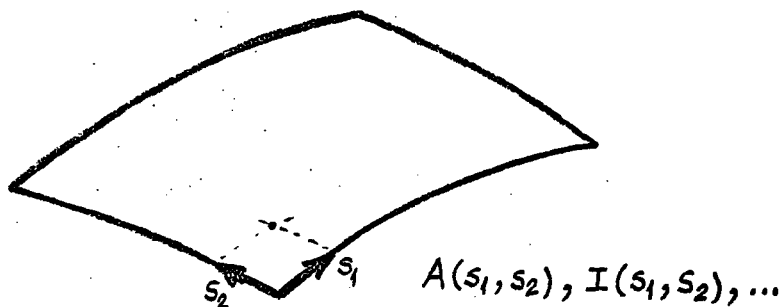


viga no recta

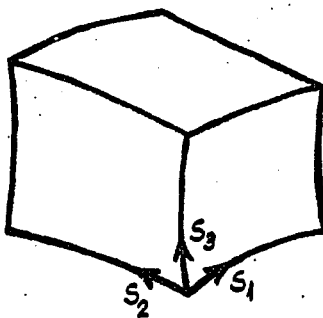


viga recta

- La cáscara o elemento bidimensional (2-D). En este caso existen dos dimensiones predominantes. Estas dos dimensiones definen una superficie que queda determinada mediante dos parámetros, s_1 y s_2 . Las características mecánicas son, en este caso, valores de punto. Si la superficie es plana, el elemento es una placa.



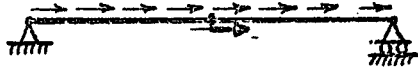
- El elemento volumétrico o tridimensional (3-D).



1.3. CONCEPTO DE GRADO DE LIBERTAD

La configuración de una estructura se puede definir mediante un conjunto de magnitudes localizadas en sus puntos. El número y clase de esas magnitudes depende es

cialmente del tipo de problema a resolver y, en definitiva, de la idealización que se haga:



estado de extensión



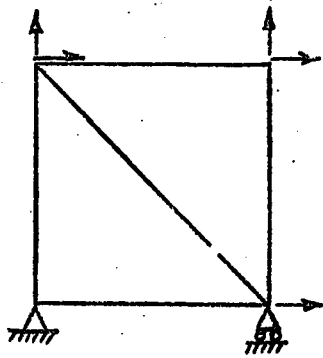
estado de flexión

Las citadas magnitudes se clasifican en estáticas (fuerzas, esfuerzos y tensiones) y cinemáticas (movimientos y deformaciones), pudiendo actuar ambas indistintamente. En cada punto, se definen mediante un sistema de coordenadas, que, en general, puede ser diferente para ambos tipos de magnitudes, aunque lo normal es que por comodidad, se hagan coincidir ambos sistemas (fuerzas y desplazamientos eficaces). La suma de las coordenadas correspondientes exclusivamente a los nudos maestros define el número de grados de libertad de la estructura. Matemáticamente, lo que se hace es definir dos bases en dos espacios vectoriales diferentes, y, por comodidad, se hacen coincidir dichas bases:

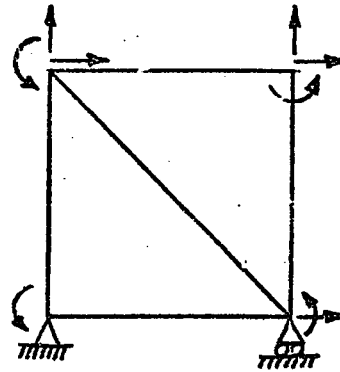
$$\underline{e}_n = \underline{e}_n^* = \underline{e}_n^{**} \quad \left\{ \begin{array}{l} * = \text{magnitudes estáticas} \\ ** = \text{magnitudes cinemáticas} \end{array} \right.$$

De las consideraciones anteriores, se desprende que, para definir una estructura, no es suficiente con co

nocer su geometría y características mecánicas, sino que - también es necesario definir sus grados de libertad:



celosía



entramado

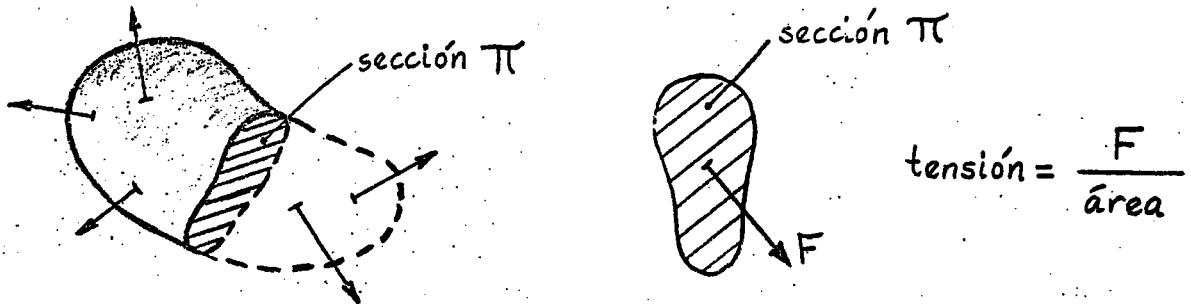
1.4. MAGNITUDES

1.4.1. Estáticas

- Fuerza: Acción que aplicada a un cuerpo, deformable o no, produce un movimiento.
- Tensión: Fuerza unitaria, interna y con características tensoriales.

Si en un cuerpo genérico, sometido a un conjunto de fuerzas, se da un corte por un plano cualquiera π , aparecen en dicho plano unas fuerzas internas, de modo que el cuerpo siga en equilibrio. La densidad de esas fuerzas es lo que se ha llamado tensión. El carácter tensorial viene

dado porque esas fuerzas internas dependen de la orientación del plano de corte.



- Esfuerzo: Se define el esfuerzo como la integral de las tensiones. En placas y láminas son integrales a lo largo del espesor y por unidad de longitud (esfuerzos unitarios) y - en los elementos monodimensionales se integra a lo largo de todo el área (esfuerzo total). Una característica de los esfuerzos, que es preciso tener siempre en cuenta, es que están en autoequilibrio.

1.4.2. Cinemáticas

- Desplazamiento: Es el único resultado visible y medible de la actuación de las fuerzas. Hay dos tipos de desplazamientos:
 - De sólido rígido: Forman parte de un campo de momentos.

- Relativos: Originan las deformaciones.

- Deformación: Representa, en cada punto, el movimiento diferencial de un segmento diferencial que contiene a dicho punto. El vector deformación (tensor deformación) depende del punto y de la dirección que se considera en él.

El estado de deformación de un punto se define mediante el tensor deformación cuyo orden depende del tipo de elementos estructurales que se consideren. Así, en elementos 2-D, el tensor deformación se refiere a la superficie media, pues los demás puntos son esclavos.

1.5. TIPOS DE ECUACIONES

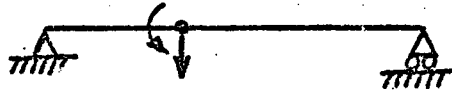
En el cálculo de estructuras existen los siguientes tipos de ecuaciones:

1) De equilibrio: relacionan fuerzas con esfuerzos

2) Constitutivas: Ligan esfuerzos con deformaciones.

3) De compatibilidad: relacionan deformaciones con movimientos.

Por ejemplo, en una viga a flexión, hay tres tipos de las ecuaciones anteriores y son los que siguen:



Compatibilidad: $\epsilon = \frac{du}{dx}$

Constitutiva : $\sigma = E \epsilon$

Equilibrio : $Q = \frac{dM}{dx}$

1.6. METODOS DE ANALISIS DE ESTRUCTURAS

a) Método de flexibilidad.

b) Método de rigidez.

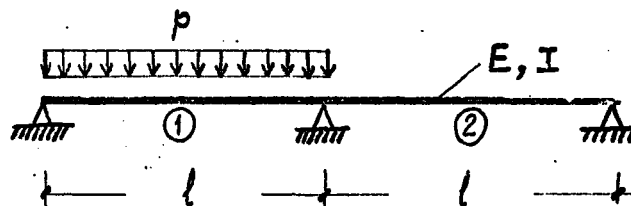
a) En el método de flexibilidad, se toman como incógnitas hiperestáticas magnitudes que satisfagan automáticamente las condiciones (ecuaciones) de equilibrio. Para obtener dichas incógnitas, se hacen sustituciones, sucesivamente, en las ecuaciones constitutivas y en las de compatibilidad. Por esa razón, el método también recibe el nombre de método de compatibilidad.

b) En el método de rigidez, se adoptan como incógnitas los movimientos, que satisfacen automáticamente las ecuaciones de compatibilidad. Se tienen en cuenta, posteriormente,

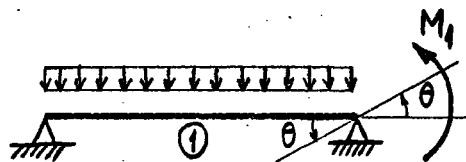
mente, las ecuaciones constitutivas y las de equilibrio. La ecuación final que se plantea es una ecuación de equilibrio. Por esa razón, el método también recibe los nombres de método de equilibrio o de desplazamientos.

c) Existen, a su vez, métodos mixtos, que participan de los dos ya citados.

EJEMPLO



1) Rigidez



θ = incógnita básica

$$M_1 = \frac{pl^2}{8} - \frac{3EI}{l} \theta \quad (\text{relación constitutiva})$$

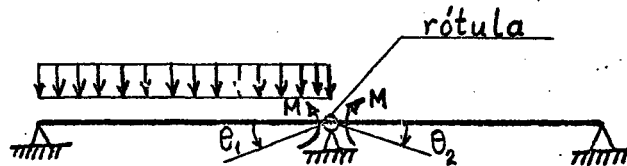
$$M_2 = \frac{3EI}{l} \theta \quad (\text{relación constitutiva})$$

La compatibilidad se satisface automáticamente, al tomar $\theta = \theta$.

Aplicando equilibrio:

$$M_1 + M_2 = 0 \rightarrow \theta = \frac{pl^4}{48EI} \rightarrow M_1 = -M_2 = \frac{pl^2}{16}$$

2) Flexibilidad



El equilibrio se satisface automáticamente, al igualar los momentos: $M = M$.

$M =$ incógnita básica.

$$\theta_1 = -\frac{Ml}{3EI} + \frac{pl^3}{24EI} \text{ (relac. constitutiva)}$$

La compatibilidad implica $\theta_1 = \theta_2$.

$$\theta_2 = \frac{Ml}{3EI} \text{ (relac. constitutiva)}$$

Resulta:

$$M = \frac{pl^2}{16} \rightarrow \theta_1 = \theta_2 = \frac{pl^3}{48EI}$$

En el caso anterior, es mejor el segundo método, pues la incógnita que interesa es el momento, que se calcula en primer lugar, al contrario de lo que ocurre con el primer método, que lo que obtiene de antemano es el ángulo.

Por regla general, los programas de ordenador -

están basados en el método de rigidez, por su mayor facilidad de programación y aplicación a estructuras generales.

1.7. TIPOS DE ESTRUCTURAS

1.7.1. Primera clasificación

- a) Lineales.
- b) No lineales.

Concepto de linealidad

En una estructura cualquiera, ante un vector acción \underline{E}_1 se produce un vector respuesta \underline{R}_1 . Análogamente, ante un vector acción \underline{E}_2 se produce un vector respuesta \underline{R}_2 . Se dice que la estructura es lineal si ante un vector acción $a\underline{E}_1 + b\underline{E}_2$ se produce un vector respuesta $a\underline{R}_1 + b\underline{R}_2$. En ese caso, es válido el principio de superposición (obtención de una línea de influencia). Las magnitudes a y b son escalares.

Matemáticamente, para que una estructura sea lineal, han de ser lineales los tres tipos de ecuaciones -- (equilibrio, constitutivas y compatibilidad).

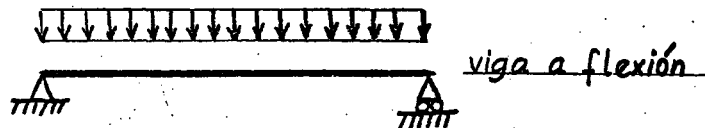
El estudio más sencillo de no linealidad es aquél en el que las ecuaciones constitutivas no son lineales (no

linealidad de material. El material ya no es elástico y - hookeano).

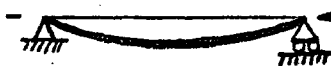
La no linealidad estática tiene lugar cuando las ecuaciones de equilibrio no son lineales. En tal caso, es preciso considerar la geometría deformada de la estructura.

El caso más difícil de no linealidad, que exige replantear el concepto de deformación ($\delta = \epsilon/l$), es la no linealidad geométrica, es decir, cuando no son lineales las ecuaciones de compatibilidad. En este caso, las deformaciones elevadas al cuadrado no son despreciables frente a la unidad. Esto ocurre, por ejemplo, en las estructuras neumáticas.

EJEMPLO



- $M = EI k$; Si varía EI con $k \rightarrow$ no linealidad de material.



• Geometría deformada: No linealidad estática.

- $k = \frac{y'''}{(1+y'^2)^{3/2}}$: No linealidad geométrica.

1.7.2. Segunda clasificación

- a) Estáticas.
- b) Dinámicas.

Una estructura se considera estática, cuando las acciones actúan con la suficiente lentitud, respecto a una característica intrínseca de la estructura (período propio), de modo que se pueden despreciar las fuerzas de inercia:

$$\frac{d^2x}{dt^2} \approx 0$$

La estructura se denomina dinámica en caso contrario, es decir, no se cumple:

$$\frac{d^2x}{dt^2} \ll 0$$

1.7.3. Tercera clasificación

- a) Estructuras de material viscoso.
- b) Estructuras de material no viscoso.

Son estructuras de material viscoso aquellas en las que las características del material dependen de la historia anterior de la estructura (materiales con memoria).

Son de material no viscoso en caso contrario.

1.7.4. Cuarta clasificación

a) Continuas.

b) Discretas.

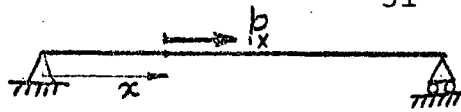
Estos tipos de estructuras ya han sido citados con anterioridad.

2. TIPOS DE PLANTEAMIENTO

Para el elemento viga, suponiendo secciones indeformables, es decir, ausencia de alabeo, cabe distinguir, según el número de grados de libertad, una serie de casos, tal como puede verse en el cuadro siguiente:

Cálculo	Directriz del elemento	Acciones	Nombre
1 g.l./n	plana - recta	en la directriz	Barra recta
2 g.l./n	plana - recta	normales a la directriz	Viga recta
3 g.l./n	plana - curva	en el plano de la directriz	Viga curva (arco)
3 g.l./n	plana - curva	normales a la directriz	Viga balcon
6 g.l./n	no plana- curva alab.		Viga alabeada

2.1. Viga recta a extensión. Método de los desplazamientos

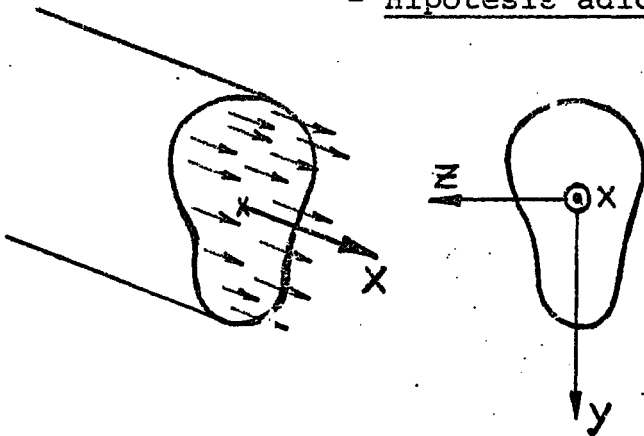


P_x (aplicada en el c. de g. de la sección)

A_x = área variable

) Planteamiento directo

- Hipótesis adicional: Se trata de una hipótesis cinemática (hipótesis de Bernoulli):



$$u_x(x, y, z) = u_x(x, 0, 0) = u_x$$

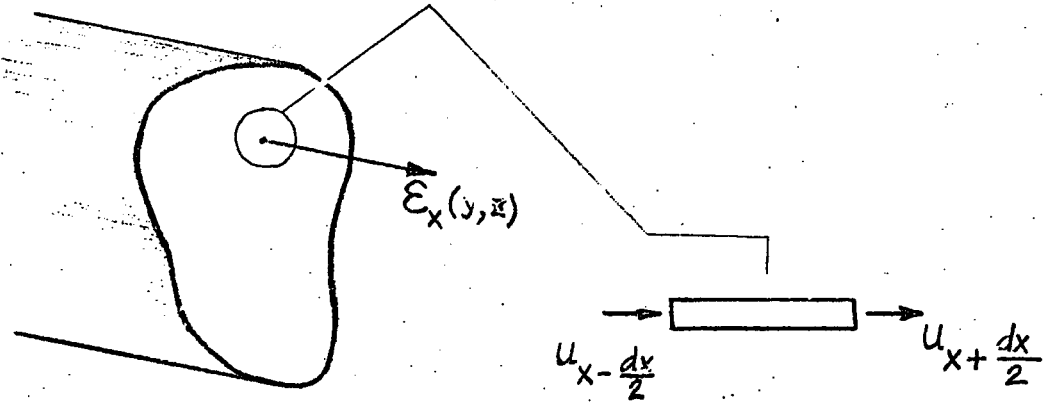
El problema se plantea en desplazamientos, tomando u_x como incógnita básica.

El cálculo se realiza a nivel de esfuerzo y no de tensión:

$$\text{Esfuerzo axial} = N_x = \iint_{A_x} \sigma_x(y, z) dy dz$$

- Definición del vector deformación a nivel de sección

La deformación longitudinal se define como sigue:



$$\epsilon_x = \frac{1}{dx} (u_{x+\frac{dx}{2}} - u_{x-\frac{dx}{2}})$$

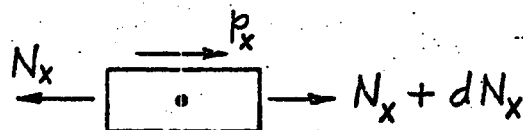
$$\epsilon_x = \epsilon_x(y, z) = \frac{\partial u_x(u, z)}{\partial x} = \frac{\partial u_x(0, 0)}{\partial x} = \epsilon_x(0, 0)$$

La ley de Hooke se satisface, supuesta la linealidad del material. En ese caso y teniendo en cuenta la hipótesis adicional, se cumple:

$$\sigma = E \epsilon ; \quad \sigma_x(y, z) = \sigma_x(0, 0) \rightarrow N_x = \sigma_x A_x$$

- Planteamiento de las ecuaciones

Sea un elemento diferencial de viga

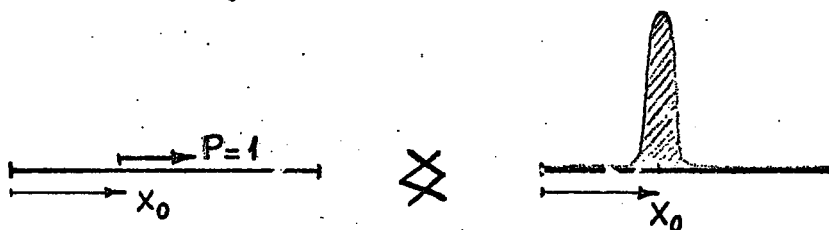


Nota: La consideración $N_x - \frac{1}{2} dN_x$ y $N_x + \frac{1}{2} dN_x$ tiene aplicación en diferencias finitas).

1) Ecuaciones de equilibrio.

Se realiza un planteamiento local: $\Gamma_x dx + dN_x = 0$.

La existencia de cargas concentradas, que no es un problema real, pero cuya resolución se necesita en ingeniería, se soluciona asimilándolas a cargas distribuidas del tipo $P \cdot \delta(x-x_0)$.



en donde $\delta(x-x_0)$ es la función delta de Dirac, que cumple:

$$\delta(x-x_0) \equiv \begin{cases} = 0 & \forall x \neq x_0 \\ \int_{x_0-\epsilon}^{x_0+\epsilon} \delta(x-x_0) dx = 1 \end{cases}$$

La ventaja que tiene la utilización de la función delta de Dirac es que, si $f(x)$ es una función continua, se cumple:

$$\int_{x_0-\epsilon}^{x_0+\epsilon} f(x) \delta(x-x_0) dx = f(x_0)$$

y si es discontinua:

$$\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} f(x) \delta(x-x_0) dx = -\frac{f(x_0-\varepsilon) + f(x_0+\varepsilon)}{2}$$

El planteamiento local de la ecuación de equilibrio (planteamiento de tipo estático) equivale a:

$$\frac{dN_x}{dx} + p_x = 0$$

Otra condición de equilibrio, a nivel interno, - que será usada posteriormente, es:

$$N_x = A_x \cdot \sigma_x$$

2) Ecuaciones de compatibilidad.

En este caso, no hay dependencia respecto de las variables y, z . (Bernouilli).

$$\varepsilon_x = \frac{du_x}{dx}$$

3) Ecuaciones constitutivas.

A nivel de fibra, la ecuación es: $\sigma_x = E \varepsilon_x$.

Sin embargo, en Cálculo de Estructuras, no es nor

mal trabajar a nivel de fibra, sino a nivel de sección. La ecuación constitutiva a nivel de sección es:

$$N_x = A_x E \epsilon_x$$

Es preciso notar que, en este caso, ambas ecuaciones constitutivas (a nivel de fibra o a nivel de sección) coinciden, debido a la hipótesis de Bernoulli.

A partir de las ecuaciones anteriores, se deduce la siguiente ecuación diferencial ordinaria:

$$\frac{d}{dx} \left(A_x E \frac{du_x}{dx} \right) + p = 0$$

Además, son necesarias las condiciones de contorno, es decir, condiciones en los grados de libertad del contorno. Estas condiciones pueden ser de tipo estático o cinemático:

$$u_x = \bar{u} \text{ (condición cinemática); } N_x = \bar{N} \text{ (condición estática)}$$

El planteamiento completo es, por lo tanto:

Ecuación diferencial en el interior de la viga

$$\frac{d}{dx} \left(A_x E \frac{du_x}{dx} \right) + p = 0 \quad x \in (0,1)$$

Ecuaciones en el contorno (extremos de la viga):

$$\begin{array}{l} x = 0 \\ \text{c.c.} \\ x = 1 \end{array}$$

Cuando las condiciones de contorno son de tipo cinemático, matemáticamente se trata de un problema de Dirichlet. En el caso de que dichas condiciones sean de tipo estático, se trata de un problema de Neuman. Siempre es más sencillo el primer tipo de problema. Además, si se exige la existencia y unicidad de solución, no es posible la imposición de condiciones de Neuman en ambos bordes. Un caso normal es la consideración de condiciones de Dirichlet y Neuman en el contorno (problemas mixtos).

La condición de tipo estático ya citada $N_x = \bar{N}$ no tiene mucho sentido matemáticamente hablando; en realidad equivale a:

$$E A_x \frac{du_x}{dx} = N$$

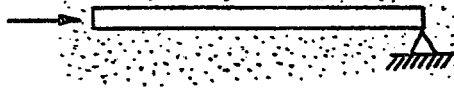
Y teniendo en cuenta que EA_x es un dato, dicha condición se reduce a $du_x/dx = \bar{\theta}$ que es la condición de Neuman ya citada.

Por otra parte, cabe señalar que cuando las condiciones en el contorno son nulas, se denominan homogéneas y no homogéneas en caso contrario.

Por último, un caso muy corriente es el de borde elástico, que corresponde a la condición $N_x + \lambda u_x = 0$.

EJEMPLO:

Deducir la ecuación diferencial de la barra recta a extensión, en un medio elástico de módulo de balasto tangencial k .



$$\text{c.c.} \quad \left\{ \begin{array}{l} x = 0 : E A_x \frac{du_x}{dx} = \bar{N} \\ x = 1 : u_x = 0 \end{array} \right.$$

$$\text{E.D.} \quad \left\{ \frac{d}{dx} (E A_x \frac{du_x}{dx}) + p_x - K u_x = 0 \right.$$

Si se consideran las fuerzas de inercia

$$\frac{d}{dx} (E A_x \frac{du_x}{dx}) + p_x(t) - K u_x(t) - \rho A_x \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = 0$$

Siendo ρ la densidad superficial.

En este caso, además de las condiciones de contorno, hay que establecer las condiciones iniciales;

$$\text{Para } t = 0 \left\{ \begin{array}{l} u_x \\ \frac{\partial u_x}{\partial t} \end{array} \right.$$

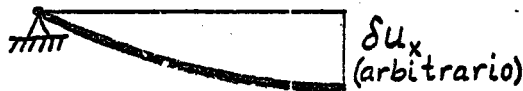
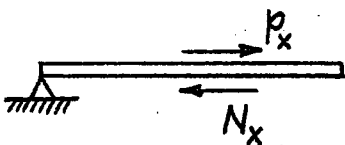
(NOTA: En un mismo borde, no pueden ser impuestas al mismo tiempo condiciones de contorno estáticas y cinemáticas).

En el caso anterior pueden existir condiciones de tipo más general (no homogéneas), es decir:

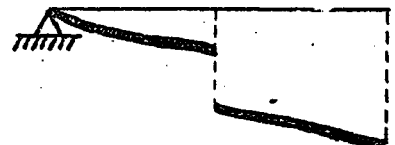
$$x = 0 \left\{ \begin{array}{l} u_x = g(t) \\ \delta \\ E A_x \frac{\partial u_x}{\partial x} = g_1(t) \end{array} \right. \quad x = 1 \left\{ \begin{array}{l} u_x = f(t) \\ \delta \\ E A_x \frac{\partial u_x}{\partial x} = f_1(t) \end{array} \right.$$

b) Planteamiento indirecto

Este tipo de métodos están basados en teoremas - energéticos (trabajos virtuales): "En una estructura sometida a fuerzas y tensiones en equilibrio la primera variación del trabajo virtual es nula":



Desplazamiento
virtual válido



Desplazamiento
virtual no válido

En la viga de la figura anterior, el desplazamiento virtual que se imponga ha de ser una función admisible (continua y que satisfaga el contorno).

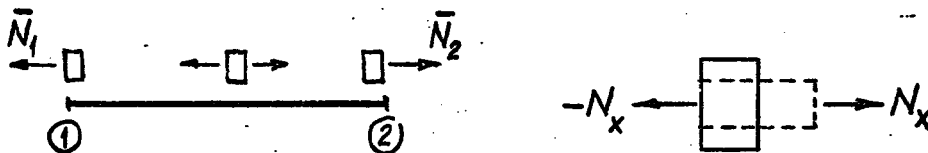
Además, en Cálculo de Estructuras, se exige que dichos movimientos virtuales no modifiquen el equilibrio de la estructura.

En resumen, los desplazamientos virtuales no modifican el equilibrio y cumplen las condiciones de compatibilidad.

La utilización de la primera variación implica que los $\Delta\sigma_x$ se desprecian.

El método de los trabajos virtuales tiene la ventaja de que las magnitudes con las que se opera (trabajos) son escalares y, por lo tanto, se pueden sumar. Esto no ocurre cuando se plantea el equilibrio, pues en dicho caso las magnitudes son vectoriales.

El planteamiento del problema conduce a



$$\delta V = \delta T_e - \delta U_i = 0^{(*)} \quad (2.1.1)$$

$$\delta T_e = \int_0^1 P_x \delta u_x dx - \bar{N}_1 \delta u_1 + \bar{N}_2 \delta u_2 \quad (2.1.2)$$

$$\delta U_i = \int_0^1 N_x (\delta \epsilon_x) dx = \int_0^1 N_x \frac{d}{dx} (\delta u_x) dx \quad (2.1.3)$$

Una posible técnica de resolución es la que sigue

Se define un δu_x , por ejemplo:

$$\delta u_x = a + bx + cx^2 + dx^3 \quad (2.1.4)$$

con a, b, c y d tales que δu_x sea virtual y con ese valor, se entra en (2.1.2) y (2.1.3), sustituyendo por último en (2.1.1).

Si se integra por partes en (2.1.3) y se tiene en cuenta:

$$\frac{d}{dx} (\delta u_x) = \delta \left(\frac{d u_x}{dx} \right)$$

resulta

$$\delta U_i = N_x \delta u_x \Big|_0^1 - \int_0^1 \delta u_x \left(\frac{dN_x}{dx} \right) dx$$

Por consiguiente:

(*)Nota: δ indica variación. T_e y U_i representan el trabajo exterior y la energía de deformación, respectivamente.

$$\delta V = \int_0^1 \left(p_x + \frac{dN_x}{dx} \right) \delta u_x dx - \bar{N}_1 \delta u_1 + \bar{N}_2 \delta u_2 + N_x (\delta u_x)_{x=0} - N_x (\delta u_x)_{x=1} \quad (2.1.5)$$

$$\delta V = \int_0^1 \left(F_x + \frac{dN_x}{dx} \right) \delta u_x dx - (N_x - \bar{N}_2)_{x=1} \delta u_2 + (N_x - \bar{N}_1)_{x=0} \delta u_1 = 0$$

Como δu_x es arbitrario, en el contorno han de estar especificadas condiciones de tipo estático y cinemático, se ha de cumplir:

$$p_x + \frac{dN_x}{dx} = 0 \quad (\text{equilibrio})$$

y además:

$$\left. \begin{array}{l} N_x = \bar{N}_2 \\ \delta u_1 = 0 \end{array} \right\} \delta \quad \left. \begin{array}{l} N_x = \bar{N}_1 \\ \delta u_2 = 0 \end{array} \right\} \delta \quad \left. \begin{array}{l} \delta u_1 = 0 \\ \delta u_2 = 0 \end{array} \right\}$$

Es decir, se deduce el mismo resultado que el obtenido mediante el planteamiento directo.

La metodología del planteamiento indirecto es la que sigue:

- Se define V, energía potencial total de la estructura.
- Se define U, energía de deformación.

$$\frac{1}{2} \int_V \sigma_x \epsilon_x dv \quad \text{ó bien:} \quad \frac{1}{2} \int N_x \epsilon_x dx = \frac{1}{2} \int E A_x \epsilon_x^2 dx$$

- Se define W, trabajo de las fuerzas exteriores: $-\int_0^1 p_x x dx$

$$V = U + W = \frac{1}{2} \int_0^1 E A_x \left(\frac{du_x}{dx} \right)^2 dx - \int_0^1 p_x u_x dx \quad (2.1.6)$$

Teniendo en cuenta que una estructura adopta un estado de movimientos tales que V sea mínima, se trata de determinar una función u_x que haga V mínimo. Es un problema típico de cálculo de variaciones (problema de funcionales):

$$\text{Si } F(y) = \int I(x, y, y') dx \quad \text{con } y = y(x)$$

tomando:

$$y = y(x) + \delta y(x)$$

Si se cumple:

$$F(y + \delta y) > F(y) \begin{cases} \delta F = 0 \\ \delta^2 F > 0 \end{cases} \quad F(y) \text{ es mínima}$$

La condición necesaria para que $y(x)$ sea extremal viene dada por la ecuación de Euler:

$$\frac{dI}{dy} - \frac{d}{dx} \left(\frac{dI}{dy'} \right) = 0$$

En el caso propuesto en (2.1.6) se reduce a:

$$p_x + \frac{d}{dx} \left(E A_x \frac{du_x}{dx} \right) = 0 \quad (2.1.7)$$

y además, en el desarrollo, se obtienen las que se han denominado condiciones de contorno (se obtienen de forma natural las condiciones naturales o estáticas como cofactores de δ_{u_1} y δ_{u_2} , cuando estos sean nulos).

Para la resolución empleando la técnica descrita en (2.1.4), es mejor utilizar la formulación (2.1.6) que la (2.1.7), ya que con la primera existen menos restricciones, al exigir a u_x solamente la existencia de la derivada primera, aunque sea discontinua, mientras que en el segundo caso también se exige la continuidad de dicha primera derivada.

3. TECNICAS DE RESOLUCION

3.1. TECNICAS DE RESOLUCION DIRECTA DE LA ECUACION DIFERENCIAL

Tal como se ha hecho para los diferentes tipos de planteamiento, en lo que sigue, las técnicas de resolución serán aplicadas a la viga recta a extensión.

La ecuación diferencial a resolver, con sus correspondientes condiciones de contorno, es la siguiente:

$$\frac{d}{dx} \left\{ E A_x \frac{du_x}{dx} \right\} + p_x = 0 \quad \forall x \in (0,1)$$

$$\text{c.c.} \begin{cases} E A_x \frac{du_x}{dx} = \bar{N}_i \\ \text{ó bien} \\ u_x = \bar{u}_i \end{cases} \quad \text{para } x = 0 (i=1) \text{ y } x = 1 (i=2)$$

En el presente caso, dado el carácter monodimensional del problema, es posible la resolución directa de la anterior ecuación diferencial. Sin embargo, no es posible la extrapolación del método a problemas de mayor dimensión (por ejemplo, en el caso de placas o láminas).

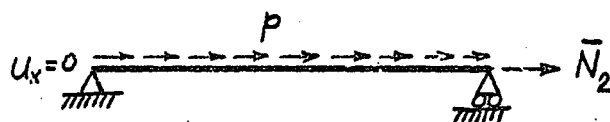
La ecuación diferencial se resuelve directamente, mediante integración como sigue:

$$E A_x \frac{du_x}{dx} = - \int_0^x p_v dv + C_1 ; \quad du_x = - \frac{dx}{E A_x} \int_0^x p_v dv + \frac{C_1}{E A_x} dx$$

$$u_x = C_1 \int_0^x \frac{dw}{E A_w} - \int_0^x \frac{1}{E A_w} \left\{ \int_0^w p_v dv \right\} dw + C_2$$

EJEMPLO 1:

Determinar la deformada y la ley de esfuerzos axiales de una barra de longitud l y sección constantes A , sometida a una carga uniformemente repartida:



Las condiciones de contorno son:

$$u_x = 0 \quad \text{para} \quad x = 0$$

$$\frac{du_x}{dx} = \bar{N}_2 / EA \quad \text{para} \quad x = 1$$

Resolución:

$$E A_x \frac{d^2 u_x}{dx^2} = -p \quad ; \quad u_x = C_1 \int_0^x \frac{dw}{E A_w} - \int_0^x \frac{1}{E A_w} \left\{ \int_0^w p \, dv \right\} dw + C_2$$

$$u_x = \frac{C_1}{EA} x - \frac{p}{2EA} x^2 + C_2$$

Es preciso señalar que al imponer las condiciones de contorno, para obtener las constantes de integración, se llega a un sistema de ecuaciones que puede ser compatible o no. (*) En este caso, es compatible, y se tiene:

$$x = 0 \rightarrow u_x = 0 \rightarrow C_2 = 0$$

$$x = 1 \rightarrow \frac{C_1}{EA} - \frac{pl}{EA} = \frac{\bar{N}_2}{EA} \quad ; \quad C_1 = \bar{N}_2 + pl$$

(*) Nota: Sólo en el caso de un problema de Neuman, barra libre en ambos bordes, el problema no tiene solución o no es única.

Por lo tanto:

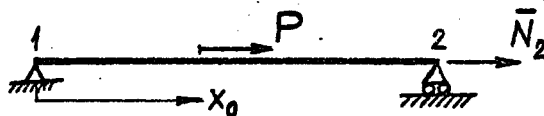
$$u_x = (\bar{N}_2 + pl) \frac{x}{EA} - \frac{p}{2EA} x^2$$

La ley de esfuerzos axiales es $N_x = EA \frac{du_x}{dx}$;

$$N_x = \bar{N}_2 + p(1-x).$$

EJEMPLO 2:

Resolver el mismo problema del caso anterior, pero estando la viga sometida a una carga de valor P a una distancia x_0 del borde 1:



$$EA \frac{d^2 u_x}{dx^2} = -P\delta(x-x_0)$$

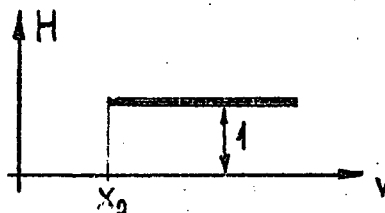
Teniendo en cuenta que:

$$\int_a^b \delta(x-x_0) f(x) dx = \begin{cases} 0 & \forall x_0 \notin (a,b) \\ f(x_0) & \forall x_0 \in (a,b) \end{cases}$$

Resulta:

$$u_x = C_1 \frac{x}{EA} - \int_0^x P \cdot \frac{H(v, x_0)}{EA} dv + C_2$$

siendo $H(v, x_0)$ una función tal que su derivada es la δ de Dirac y que cumple:



$$H(v, x_0) = \begin{cases} 1 & \text{si } v \geq x_0 \\ 0 & \text{si } v < x_0 \end{cases}$$

Por lo tanto, se deduce:

$$\begin{aligned} u_x &= C_1 \frac{x}{EA} - \frac{P}{EA} \underbrace{\int_0^{x_0} \frac{H(v, x_0)}{EA} dv}_{=0} - \frac{P}{EA} \int_{x_0}^x H(v, x_0) dv + C_2 = \\ &= C_1 \frac{x}{EA} - \frac{P}{EA} (x - x_0) H(x - x_0) + C_2 \end{aligned}$$

Ya que $\forall x < x_0, H(x, x_0) = 0$ y para $x \geq x_0, H(x, x_0) = 1$

$$u_x = \frac{C_1}{EA} x - \frac{P}{EA} (x - x_0) H(x - x_0) + C_2$$

Imponiendo las condiciones de contorno, se obtiene la ley de desplazamientos, que, en realidad, es una función de Green:

$$G(x, x_0) = u_x = \frac{P}{EA} \{x - (x, x_0) H(x, x_0)\} + \frac{\bar{N}_2}{EA} x$$

Físicamente, la resolución anterior equivale al cálculo de una línea de influencia.

La ley de esfuerzos axiales es:

$$N_x = P \{1 - H(x, x_0)\} + \bar{N}_2$$

Llegados a este punto, es conveniente señalar algunas características de $G(x, x_0)$.

Propiedades de la función de Green

Dicha función es la solución del siguiente problema variacional.

$$\begin{cases} L(x) = \delta(x, x_0) \\ \text{c.c.} \end{cases}$$

teniendo en cuenta, además, que si en $L(x)$ aparecen derivadas de orden n , las derivadas de la función de Green son continuas hasta el orden $n-2$, existiendo un salto en la derivada de orden $n-1$. (*)

En el ejemplo 2 anterior, la derivada primera tiene un salto y la derivada segunda d^2u_x/dx^2 no existe desde un punto de vista estricto.

(*) Nota: El valor de este salto es la inversa del coeficiente del término derivada n -simo de $L(x)$ particularizado para $x = x_0$.

Para el caso de carga cualquiera ($p(x) = \int_0^x \delta(x_0, x) p(x_0) dx_0$) la solución del problema, teniendo en cuenta la linealidad, es:

$$u_x = \int_0^x G(x_0, x) p(x_0) dx_0$$

Si el problema es autoadjunto, la función de Green es simétrica, es decir:

$$G(x, x_0) = G(x_0, x) \quad ; \quad u_x = \int_0^x G(x, x_0) p(x_0) dx_0$$

Otra manera de definir la función de Green es como la solución del problema homogéneo siguiente:

$$\begin{cases} E A_x \frac{d^2 u_x}{dx^2} = 0 \\ \text{c.c. homogéneas} \end{cases}$$

y que además es continua hasta la derivada de orden $n-2$, teniendo un salto unidad en la derivada de orden $n-1$. Si existiese la continuidad hasta el orden n , la solución sería:

$$u_x = 0$$

3.2. METODO DE SUPERPOSICION

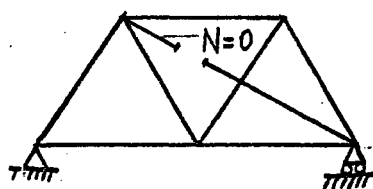
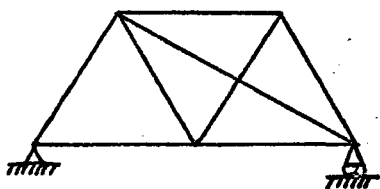
Esta técnica de resolución de la ecuación diferencial, que puede ampliarse a problemas más complejos (placas,

láminas., ...), consiste en considerar la solución de la ecuación diferencial como suma de una solución particular más una solución complementaria:

$$u_x = u_x^0 + u_x^c$$

La solución particular u_x^0 es una función que satisface la ecuación diferencial, pero no las condiciones de contorno. Se le exige que cumpla el equilibrio, pero no todas las condiciones de compatibilidad.

Desde el punto de vista físico, el problema es el mismo que el planteado al formar la matriz de rigidez de una estructura, sin introducir las condiciones de contorno. De una manera más clara, la solución complementaria equivale a la estructura isostática básica que se considera en la resolución de un problema hiperestático:

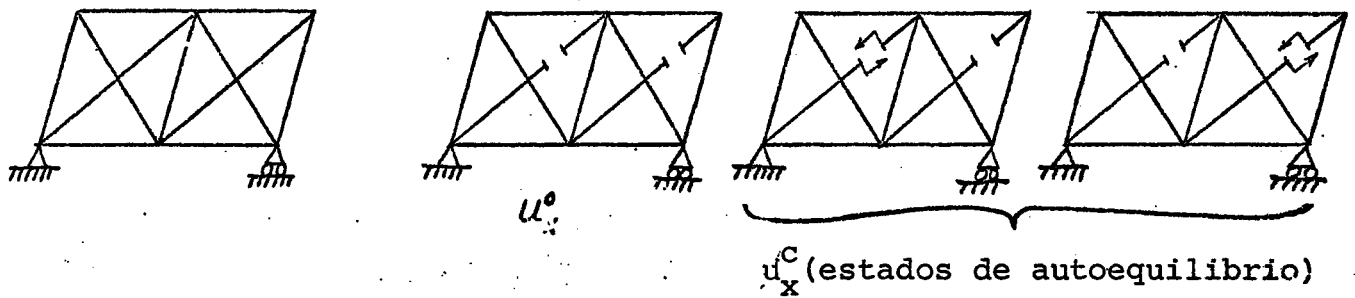


(Isostática básica)

La solución complementaria u_x^c corresponde a la solución general de la ecuación diferencial homogénea (sin término independiente de cargas). Se trata de una solución

que está en autoequilibrio (cargas exteriores cero).

Desde el punto de vista físico, esta solución equivale a los distintos estados auxiliares empleados en la resolución de una estructura hiperestática:

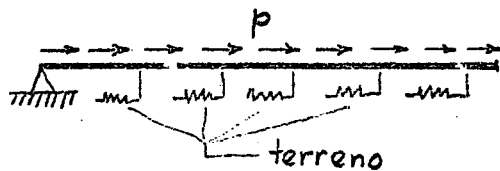


Los estados de autoequilibrio han de ser linealmente independientes.

Para la obtención de las constantes de integración de la ecuación diferencial, se obliga a cumplir las condiciones de compatibilidad, es decir, se imponen las condiciones de contorno.

EJEMPLO 1:

Determinar la deformada y la ley de axiles de una barra recta de longitud l , y área y perímetro constantes A y d respectivamente, sometida a una carga uniforme p e in-



introducida en un medio elástico de módulo de balasto k . La barra se halla fija en un extremo y libre en el otro:

$$EA \frac{d^2 u_x}{dx^2} - Kd u_x + p = 0; u_x = 0 \text{ en } x = 0; \frac{du_x}{dx} = 0 \text{ en } x = l$$

Solución particular: $u_x^o = \frac{p}{Kd}$

Solución complementaria: $EA \frac{d^2 u_x}{dx^2} - Kd u_x = 0$

ria:

llamando

$$\lambda = \frac{Kd}{EA}$$

resulta:

$$\frac{d^2 u_x}{dx^2} - \lambda^2 u_x = 0; r^2 - \lambda^2 = 0; u_x^c = C_1 e^{\lambda x} + C_2 e^{-\lambda x}$$

Resulta más cómodo:

$$u_x^c = C_1 e^{-\lambda(1-x)} + C_2 e^{-\lambda x}; u_x^c = C_1 e^{-\lambda x'} + C_2 e^{-\lambda x}$$

o bien

$$u_x^c = C_1 e^{-\lambda x} + C_2 e^{-\lambda x'}$$

La solución general es:

$$u_x = c_1 e^{-\lambda x} + c_2 e^{-\lambda x'} + \frac{p}{k d} ; \quad \frac{du_x}{dx} = -\lambda c_1 e^{-\lambda x} + \lambda c_2 e^{-\lambda x}$$

Las condiciones de contorno son:

$$u_x = 0 \big|_{x=0, x'=1} ; \quad \frac{du_x}{dx} = 0 \big|_{x=1, x'=0}$$

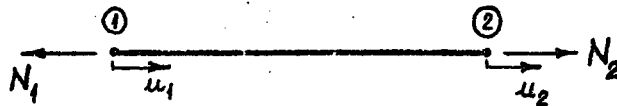
Resulta:

$$u_x = -\frac{p}{k d} \left\{ \frac{1}{e^{-\lambda l} + e^{\lambda l}} (e^{\lambda(x-1)} + e^{\lambda(1-x)}) - 1 \right\} = -\frac{p}{k d} \left(\frac{\text{Ch} \lambda (x-1)}{\text{Ch} \lambda} - 1 \right)$$

$$N_x = -p \frac{\text{Sh} \lambda (x-1)}{\text{Ch} \lambda l}$$

EJEMPLO 2:

Determinar la matriz de rigidez de la barra del ejemplo anterior:



$$u_x^c = c_1 e^{-\lambda x} + c_2 e^{-\lambda x'} = \begin{Bmatrix} e^{-\lambda x} & e^{-\lambda x'} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{Bmatrix}$$

$$N_x^C = EA \frac{du_x^C}{dx} = -C_1 \lambda e^{-\lambda x} + C_2 \lambda e^{-\lambda x'} = \{-\lambda e^{-\lambda x} \quad -e^{-\lambda x'}\} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}$$

Sean

$$u_1 = \{u_x^C\}_{x=0 \atop x'=1} \quad y \quad u_2 = \{u_x^C\}_{x=1 \atop x'=0}$$

El vector desplazamientos es:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & e^{-\lambda 1} \\ e^{-\lambda 1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} \rightarrow \underline{d} = \underline{G_d} \underline{C} \quad (3.2.1)$$

Por otra parte:

$$p_1 = -N_1 = -EA \left. \frac{du_x^C}{dx} \right|_{x=0 \atop x'=1} ; p_2 = N_2 = EA \left. \frac{du_x^C}{dx} \right|_{x=1 \atop x'=0}$$

Entonces:

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = EA \begin{bmatrix} \lambda & -\lambda e^{-\lambda 1} \\ -\lambda e^{-\lambda 1} & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} ; \underline{p} = \underline{G_p} \underline{C} \quad (3.2.2)$$

Eliminando \underline{C} entre (3.2.1) y (3.2.2) resulta

$$\underline{p} = \underline{G_p} \underline{G_d}^{-1} \underline{d}$$

La matriz de rigidez es:

$$\underline{K} = \underline{G}_p \underline{G}_d^{-1}$$

\underline{G}_d es siempre regular, pues proviene de un problema de Dirichlet (condiciones esenciales), que siempre tiene solución.

En cambio \underline{G}_p puede ser singular, pues proviene de un problema de Neuman (ya intervienen derivadas).

La expresión de la matriz de rigidez es:

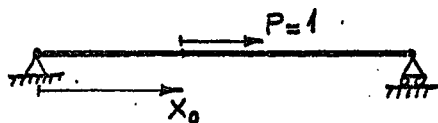
$$\underline{K} = \frac{\lambda EA}{1 - e^{-2\lambda l}} \begin{bmatrix} (1 + e^{-2\lambda l}) & -2e^{-\lambda l} \\ -2e^{-\lambda l} & (1 + e^{-2\lambda l}) \end{bmatrix}$$

Es preciso señalar que la matriz de rigidez anterior no es singular, salvo en el caso $\lambda = 0$. Ello es debido a que, en el caso de que $\lambda \neq 0$, la viga está sustentada por los muelles (terreno elástico) y ya se han eliminado los movimientos de sólido rígido.

3.3. TECNICAS DE RESOLUCION DE LA ECUACION DIFERENCIAL UTILIZANDO LA FUNCION DE GREEN

Como es sabido, la función de Green equivale a la solución de la ecuación diferencial correspondiente al

caso de acción puntual unidad aplicada en un punto genérico de la barra:



$$u_x = u(x, x_0) = G(x, x_0)$$

En problemas conservativos (por ejemplo, las estructuras neumáticas conducen a problemas no conservativos), se cumple:

$$G(x, x_0) = G(x_0, x)$$

Una posible técnica de resolución por medio de la función de Green consiste en considerar dos soluciones complementarias y plantear las condiciones de equilibrio y compatibilidad entre las caras dorsal y frontal de la rebana correspondiente a $x = x_0$.

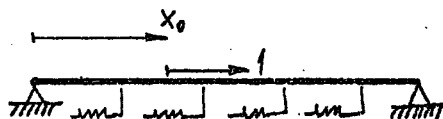
Una vez obtenida la función de Green, la solución, de un problema para carga de tipo general es la que sigue:

$$u_x = \int_0^L G(x, x_0) p(x_0) dx_0$$

La técnica de construcción de la función de Green se explica con más detalle en el ejemplo siguiente:

EJEMPLO

Determinar la función de Green para la viga en un medio elástico de la figura:



$$EA \frac{d^2 u_x}{dx^2} - Kd u_x = \delta(x-x_0) \quad (3.3.1)$$

$$u_x = 0 \quad \text{para} \quad x = 0 \quad \text{y} \quad x = 1$$

La función de Green es una función continua. Su derivada primera tiene un salto de valor EA para $x = x_0$.

Sean:

$$\begin{aligned} u_x^{(1)} &= C_1 e^{\lambda x} + C_2 e^{-\lambda x} : x \in \{0, x_0\} \\ u_x^{(2)} &= C'_1 e^{\lambda v} + C'_2 e^{-\lambda v} : v \in \{x_0, 1\} \end{aligned} \quad \text{siendo } \lambda = \frac{Kd}{EA} ; v = 1-x$$

Las condiciones de contorno son:

$$x = 0 : u_x^{(1)} = 0 \rightarrow C_1 + C_2 = 0 \quad (3.3.2)$$

$$v = 0 : u_x^{(2)} = 0 \rightarrow C'_1 + C'_2 = 0 \quad (3.3.3)$$

Las condiciones de continuidad en $x=x_0$ son:

- Compatibilidad de desplazamientos: $u_{x_0}^{(1)} = u_{x_0}^{(2)}$

$$C_1 e^{\lambda x_0} + C_2 e^{-\lambda x_0} = C_1' e^{\lambda(1-x_0)} + C_2' e^{-\lambda(1-x_0)} \quad (3.3.4)$$

- Equilibrio:

$$-EA \left. \frac{du_x^{(2)}}{dv} \right|_{v=1-x_0} = EA \left. \frac{du_x^{(1)}}{dx} \right|_{x=x_0} = 1 \quad \leftarrow \begin{array}{c} \uparrow \\ \boxed{\bullet} \end{array} \rightarrow \quad (3.3.5)$$

es decir

$$-EA\lambda\{C_1' e^{\lambda(1-x_0)} - C_2' e^{-\lambda(1-x_0)}\} - EA\lambda\{C_1 e^{\lambda x_0} - C_2 e^{-\lambda x_0}\} = 1 \quad (3.3.6)$$

La expresión (3.3.5) se obtiene matemáticamente integrando en la fórmula (3.3.1):

$$\int_{x_0-\epsilon}^{x_0+\epsilon} (EA \frac{d^2 u_x}{dx^2}) dx - \int_{x_0-\epsilon}^{x_0+\epsilon} (Kd u_x) dx = \int_{x_0-\epsilon}^{x_0+\epsilon} \delta(x-x_0) dx = 1 ;$$

$$\{EA \frac{du_x}{dx}\}_{x_0+\epsilon} - \{EA \frac{du_x}{dx}\}_{x_0-\epsilon} = 1$$

y realizando el cambio de varibale $v = 1-x$ se obtiene (3.3.5).

A partir de (3.3.2), (3.3.3), (3.3.4) y (3.3.6) - se obtienen las constantes de integración.

Los resultados finales son:

$$C_1 = -C_2 = -\frac{1}{\lambda EA} \frac{e^{\lambda(1-x_0)} - e^{-\lambda(L-x_0)}}{e^{\lambda 1} - e^{-\lambda 1}} ;$$

$$C'_1 = -C'_2 = -\frac{1}{\lambda EA} \frac{e^{\lambda x_0} - e^{-\lambda x_0}}{e^{\lambda 1} - e^{-\lambda 1}}$$

$$u_x^{(1)} = -\frac{1}{\lambda EA} \frac{e^{\lambda(1-x_0)} - e^{-\lambda(1-x_0)}}{e^{\lambda 1} - e^{-\lambda 1}} \{e^{\lambda x} - e^{-\lambda x}\} \quad \forall x \in \{0, x_0\}$$

$$u_x^{(2)} = -\frac{1}{\lambda EA} \frac{e^{\lambda x_0} - e^{-\lambda x_0}}{e^{\lambda 1} - e^{-\lambda 1}} \{e^{\lambda(1-x)} - e^{-\lambda(1-x)}\} \quad \forall x \in \{x_0, 1\}$$

3.4. SOLUCIONES EN SERIE

3.4.1. Solución de Navier

Se trata de un método bueno de resolución de la ecuación diferencial, aunque es válido solamente para cierto tipo de condiciones de contorno (por ejemplo, en láminas, las condiciones de apoyo han de ser de tipo tímpano).

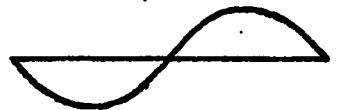
En lo que se refiere a la viga recta a extensión:

$$\frac{d}{dx} \left(EA \frac{du_x}{dx} \right) + p = 0.$$

c.c. en $x=0$ y $x=1$

La solución, que no se conoce, se aproxima mediante curvas del tipo:

$$C_n \operatorname{sen} \frac{n \pi x}{1}$$



y se debe cumplir:

$$u_x = 0 \quad \text{en} \quad x = 0 \quad \text{y} \quad x = 1.$$

(las curvas son del tipo seno, en el caso anterior, ya que la carga es constante de valor p).

Lo importante del tipo de funciones utilizadas es que son autofunciones que provienen de problemas de autovalores.

La idea del método reside en considerar un conjunto completo de funciones ortogonales ($\int_0^1 \psi_n(x) \psi_m(x) dx = \delta_{mn}$), que satisfacen las condiciones de contorno, pero no la ecuación diferencial.

La solución se obtiene por combinación de un número

ro infinito de esas funciones ortogonales.

La aplicación práctica del método se detalla en -
el siguiente ejemplo:

Ejemplo

$$EA \frac{d^2 u_x}{dx^2} - Kd u_x + p = 0$$

$$u_x = 0 \quad \text{en} \quad x = 0 \quad \text{y} \quad x = 1$$

Se supone:

$$p_x = p = \sum_{n=1}^{\infty} p_n \operatorname{sen} \frac{n \pi x}{1}$$

En virtud de la ortogonalidad:

$$\int_0^1 p_x \operatorname{sen} \frac{n \pi x}{1} dx = p_n \int_0^1 \operatorname{sen}^2 \frac{n \pi x}{1} dx; \text{ pues } \int_0^1 \operatorname{sen} \frac{m \pi x}{1} \operatorname{sen} \frac{n \pi x}{1} dx = 0 \quad \forall m \neq n$$

$$p_n = \begin{cases} 0 & \forall n=2 \\ \frac{4p}{n\pi} & \forall n=2+1 \end{cases}$$

Se supone:

$$u_x = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \operatorname{sen} \frac{n \pi x}{1} \text{ que satisface las c.c.}$$

Entrando en la ecuación diferencial:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\left\{ -EA \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 - Kd \right\} u_n + p_n \right] \cdot \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l} = 0$$

Como $\operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l}$ es un conjunto linealmente independiente, se cumple:

$$u_n = \frac{p_n}{EA \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 + Kd}$$

La solución final es:

$$u_x = \frac{4p}{\pi EA} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \left\{ \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 + \lambda^2 \right\}} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{con } \lambda^2 = \frac{Kd}{EA} \\ \text{y } n=2+1 \end{array} \right.$$

y

$$N_x = EA \frac{du_x}{dx} = \frac{4p}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 + \lambda^2} \cos \frac{n\pi x}{l}$$

siendo, asimismo $n = 2 + 1$.

Fijándose en el denominador que es del tipo n^3 se observa que es más convergente u_x que N_x . Es decir, cada vez que se deriva se pierde convergencia, por lo que son necesarios más términos en el desarrollo en serie de Fourier. Hay que señalar que en placas, en donde aparecen derivadas de ma

por orden, es preciso tomar más términos en el desarrollo para obtener el mismo grado de aproximación.

En general mediante estos métodos, se obtiene desplazamientos muy exactos. Esta exactitud es bastante menor en lo que se refiere a los esfuerzos.

Llamando $\alpha = \lambda l$, se tiene:

$$u_x^{\text{Navier}} = \frac{p}{Kd} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \left\{ \left(\frac{n\pi}{\alpha} \right)^2 + 1 \right\}} \sin \frac{n\pi x}{l} \quad \text{con } n=2+1$$

$$u_x^{\text{Exacta}} = \frac{p}{Kd} \left\{ \frac{(1-e^{\alpha})e^{\lambda x} + e^{\alpha}(1-e^{-\alpha})e^{-\lambda x}}{e^{2\alpha} - 1} + 1 \right\}$$

Prescindiendo del factor común P/Kd y comparando las dos soluciones, en el centro de la luz ($x=l/2$), para las flechas, y en $x=0$ para N_x :

$x = \frac{l}{2}$	α	0.01	2.0	3.0
	u_x^*			
	Exacta	0.000	0.352	0.575
	aproxim. 1 término	0.000	0.367	0.607
$x = 0$	aproxim. 2 términos	0.000	0.349	0.568
	α	0.01	2.0	3.0
	N_x^*			
	Exacta	0.000	1.523	2.715
	aproxima. 1 término	0.000	1.154	1.908
	aproxima. 2 términos	0.000	1.326	2.276

$$u_x^* = u_x \cdot \frac{Kd}{p}$$

Serie alternada → buena convergencia.

$$N_x^* = N_x \cdot \frac{Kdl}{pEA}$$

Serie uniforme → con-
vergencia más lenta.

NOTA:

Estrictamente hablando, la δ de Dirac no se puede desarrollar en serie de Fourier, pues no cumple las condiciones de Dirichlet. Sin embargo, en la práctica, se realiza el desarrollo citado y se obtienen resultados aceptables.(1)

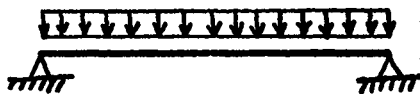
3.4.2. Solución generalizada de Navier

Se utilizan las ideas expresadas en el apartado anterior, pero para otras condiciones de contorno.

Las características del método de Navier consiste en encontrar un conjunto linealmente independiente de funciones, preferiblemente ortogonales, que satisfagan las condiciones de contorno y que se reproduzcan a sí mismas para un cierto orden de derivación.

Como ejemplos indicativos de lo anteriormente expuesto, pueden ser elegidos los que siguen:

- Solución de Navier:



$$EI \frac{d^4 w}{dx^4} + p(x) = 0$$
$$\left\{ \begin{array}{l} w = 0 \\ EI \frac{d^2 w}{dx^2} = 0 \end{array} \right. \left| \begin{array}{l} \text{para } x=0 \\ \text{y } x=1 \end{array} \right.$$

(1) Nota: Técnicamente es posible justificar el desarrollo anterior recurriendo a la teoría de las distribuciones.

- Solución generalizada de Navier:



$$EI \frac{d^4 w}{dx^4} + p(x) = 0$$

$$\text{c.c.} \quad \begin{cases} w = 0 ; & w' = 0 & \text{para } x = 0 \\ w = 0 ; & w'' = 0 & \text{para } x = 1 \end{cases}$$

En el segundo caso, hay que hallar unas funciones que se reproduzcan a sí mismas en el intervalo (0,1):

$$EI \frac{d^4 \psi}{dx^4} = \lambda \psi$$

y que, además satisfagan las condiciones:

$$\psi = 0 ; \quad \frac{d\psi}{dx} = 0 \quad \text{para } x=0$$

$$\psi = 0 ; \quad \frac{d^2 \psi}{dx^2} = 0 \quad \text{para } x=1$$

Existe solución diferente de $\psi=0$, si el problema es positivo definido. En realidad, se trata de un problema de autovalores y autofunciones.

Las ideas que se van a exponer a continuación han sido aplicadas al Cálculo de Estructuras por Lord Rayleigh y posteriormente por Inglis.

Denominando $\lambda/EI = \mu^4$

$$\frac{d^4\psi}{dx^4} = \mu^4\psi ; \quad r^4 - \mu^4 = 0; \quad r = \begin{cases} \pm\mu \\ \pm i\mu \end{cases}$$

La solución de la ecuación diferencial es

$$\psi = A_1 \cos\mu x + A_2 \sen\mu x + A_3 \operatorname{Ch}\mu x + A_4 \operatorname{Sh}\mu x$$

Obligando a que se cumplan las condiciones de contorno, resulta:

$$A_1 \cdot 1 + A_2 \cdot 0 + A_3 \cdot 1 + A_4 \cdot 0 = 0$$

$$-A_1 \cdot 0 + A_2 \cdot 1 + A_3 \cdot 0 + A_4 \cdot 1 = 0$$

$$A_1 \cdot \cos\mu l + A_2 \cdot \sen\mu l + A_3 \cdot \operatorname{Ch}\mu l + A_4 \cdot \operatorname{Sh}\mu l = 0$$

$$-A_1 \cdot \cos\mu l - A_2 \cdot \sen\mu l + A_3 \cdot \operatorname{Ch}\mu l + A_4 \cdot \operatorname{Sh}\mu l = 0$$

El sistema anterior tiene solución distinta de la trivial, si el determinante de los coeficientes es igual a cero, es decir:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ c & s & C & S \\ -c & -s & C & S \end{vmatrix} = 0, \text{ siendo } \begin{matrix} s = \text{sen} \mu l ; & c = \text{cos} \mu l \\ S = \text{Sh} \mu l ; & C = \text{Ch} \mu l \end{matrix}$$

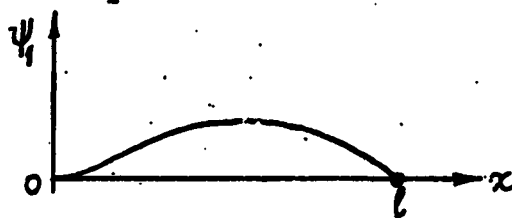
En ese caso, se llega a una ecuación trascendente, que admite infinitas soluciones para el parámetro μ .

Dichas soluciones (autovalores) pueden ser ordenadas de menor a mayor $\mu_1 < \mu_2 < \mu_3 < \dots < \mu_n < \dots$

Las funciones correspondientes (autofunciones) $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$, ..., $\psi_n(x)$, ... son ortogonales y linealmente independientes.

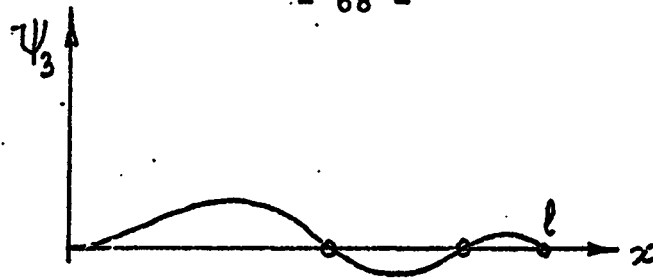
Las anteriores autofunciones tienen las siguientes características:

- La función ψ_1 corta 0 veces al eje x en $(0,1)$



- La función ψ_2 lo corta 1 vez en $(0,1)$.





- La función ψ_3 lo corta 2 veces en $(0,1)$.

Y así sucesivamente.

La idea a seguir consiste en desarrollar $p(x)$:

$$p(x) = \sum_1^{\infty} p_n \psi_n(x)$$

Y teniendo en cuenta la ortogonalidad de las auto-funciones:

$$p_n = \frac{\int_0^1 p(x) \psi_n(x) dx}{\int_0^1 \{\psi_n(x)\}^2 dx}$$

Por otra parte, se supone que se cumple:

$$w(x) = \sum_1^{\infty} w_n \psi_n(x)$$

y entrando en la ecuación diferencial:

$$EI w_n \frac{d^4 \psi_n(x)}{dx^4} + p_n \psi_n(x) = 0 ; \quad \forall n$$

$$w_n \lambda + p_n = 0 \rightarrow w_n = - \frac{p_n}{\lambda} = \frac{-p_n}{\mu^4 EI}$$

$$w(x) = \sum_1^{\infty} - \frac{P_n}{\mu^4 EI} \psi_n(x)$$

En el caso de la viga recta a extensión, el problema es:

$$\left. \begin{aligned} & \frac{d}{dx} \left\{ A_x E \frac{du_x}{dx} \right\} - K_x \frac{d}{dx} u_x = p_x \\ & \text{o bien:} \\ & \frac{d}{dx} \left\{ A_x E \frac{du_x}{dx} \right\} - K_x \frac{d}{dx} u_x + \lambda^2 u_x = 0 \end{aligned} \right\} \text{con c.c.} \begin{cases} u_x=0 \text{ ó } u'_x=0 & \text{en } x=0 \\ u_x=0 \text{ ó } u'_x=0 & \text{en } x=1 \end{cases}$$

Existe un conjunto infinito de autovalores y autofunciones:

$$\begin{array}{ccccccc} \lambda_1 & < & \lambda_2 & < \dots < & \lambda_n & < \dots \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ u = \psi_1 & & \psi_2 & & \psi_n & & \end{array}$$

Desarrollando

$$p(x) = \sum_1^{\infty} p_n \psi_n(x)$$

Y suponiendo

$$u_x = \sum_1^{\infty} u_n \psi_n(x)$$

Debido a la ortogonalidad de las autofunciones

$$p_n = \frac{\int_0^1 p(x) \psi_n(x) dx}{\int_0^1 \psi_n^2(x) dx}$$

Entrando en la ecuación diferencial

$$u_n \frac{d}{dx} \left\{ A_x E \frac{d\psi_n(x)}{dx} \right\} - K_x \frac{d}{dx} u_n \psi_n(x) = -\lambda_n^2 u_n \psi_n(x)$$

$$\text{Por lo tanto } -\lambda_n^2 u_n = p_n$$

Es decir:

$$u_x = \sum_1^{\infty} \frac{-p_n}{\lambda_n^2} \psi_n$$

EJEMPLO 1

Resolver el problema de la barra recta a extensión introducida en un medio elástico, que se ha venido considerando hasta el momento, pero con las condiciones de contorno que se indican a continuación:

$$EA \frac{d^2 u_x}{dx^2} - K \frac{d}{dx} u_x = p$$

$$\text{c.c.} \quad \begin{cases} u_x = 0 & \text{en } x = 0 \\ u'_x = 0 & \text{en } x = 1 \end{cases}$$

En este caso, no puede ser utilizada la solución de Navier, con funciones del tipo $\sin \frac{n\pi x}{l}$ pues en una de las condiciones de contorno aparece la derivada que es una función "coseno".

Por lo tanto, utilizando la solución de Navier generalizada:

$$EA \frac{d^2 \psi}{dx^2} - Kd\psi = -\lambda^2 \psi$$

$$\text{c.c.} \quad \begin{cases} \psi = 0 & \text{en } x = 0 \\ \frac{d\psi}{dx} = 0 & \text{en } x = 1 \end{cases}$$

La ecuación característica es:

$$EA r^2 - Kd + \lambda^2 = 0$$

y llamando

$$\mu^2 = \frac{\lambda^2 - Kd}{EA}$$

se tiene $r = \pm i\mu$, con lo cual:

$$\psi = C_1 \cos \mu x + C_2 \sen \mu x ; \text{ c.c. } \begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 \cos \mu l = 0 \end{cases}$$

La solución trivial $C_2 = 0$ no interesa, sino

$$\cos \mu l = 0 ; \quad \mu l = \frac{2n-1}{2} \pi ; \quad \mu_n = \frac{2n-1}{2} \frac{\pi}{l} \quad \text{con } n=1,2,\dots$$

Los diferentes autovalores son del tipo

$$\lambda_n = \sqrt{\left\{ \frac{(2n-1)\pi}{2l} \right\}^2 EA + Kd} = \frac{\sqrt{EA}}{l} \cdot \sqrt{\left\{ \frac{(2n-1)\pi}{2} \right\}^2 + \alpha^2} ; \quad \text{con } \alpha^2 = \frac{Kdl^2}{EA}$$

Y las autofunciones

$$\psi_n(x) = \sen\left(\frac{2n-1}{2} \frac{\pi x}{l}\right)$$

En realidad, como el sistema es homogéneo, la autofunción genérica $\psi_n(x)$ va multiplicada por un factor, cuya consideración no es necesaria.

Además se verifica

$$p_n = \frac{\int_0^l \sen(\mu_n x) p \, dx}{\int_0^l \sen^2(\mu_n x) \, dx} = \frac{4p}{(2n-1)\pi} ; \quad n=1,2,\dots$$

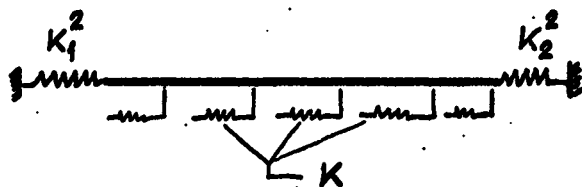
con lo cual, la solución es:

$$u_x = \sum_1^{\infty} \frac{P_n}{\lambda_n^2} \text{sen}(\mu_n x)$$

EJEMPLO 2

Determinar los autovalores y autofunciones de una viga en medio elástico, con ambos extremos coaccionados elásticamente.

$$EA \frac{d^2 u_x}{dx^2} - Kd u_x + \lambda^2 u_x$$



$$\text{c.c.} \left\{ \begin{array}{l} \frac{du_x}{dx} + K_1^2 u_x = 0, \quad \text{en } x = 0 \\ \frac{du_x}{dx} - K_2^2 u_x = 0, \quad \text{en } x = l \end{array} \right.$$

Resolviendo la ecuación diferencial, se obtiene

$$u_x = C_1 \text{sen} \mu x + C_2 \text{cos} \mu x ; \quad \text{con} \quad \mu^2 = \frac{\lambda^2 - Kd}{EA}$$

e imponiendo las condiciones de contorno, resulta

$$\left. \begin{array}{l} \mu C_1 + K_1^2 C_2 = 0 \\ (\mu \text{cos} \mu l - K_2^2 \text{sen} \mu l) C_1 - (\mu \text{sen} \mu l + K_2^2 \text{cos} \mu l) C_2 = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{es decir:} \\ \text{tg} \mu l = \mu \frac{K_1^2 + K_2^2}{K_1^2 K_2^2 - \mu^2} \end{array}$$

La anterior ecuación trascendente permite obtener los autovalores

$$\mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_n < \dots$$

Las autofunciones son, en este caso, del tipo

$$\psi_n(x) = C_1 \left(\operatorname{sen} \mu_n x - \frac{\mu_n}{K_1^2} \cos \mu_n x \right)$$

y no son ortogonales. Para que las autofunciones sean ortogonales, es necesario que el operador L de la ecuación diferencial sea autoadjunto:

$$\begin{cases} L u = p \\ \text{c.c.} \end{cases}$$

es decir

$$\int_0^1 L(u) v \, dx = \int_0^1 L(v) u \, dx$$

siempre que u y v cumplan las condiciones de contorno.

Sin embargo siempre se puede efectuar el desarrollo

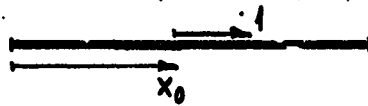
$$p(x) = \sum_1^{\infty} p_n \psi_n(x)$$

y mediante el método de Erhard - Schmidt formar unas nuevas funciones que sean ortogonales:

$$\left. \begin{aligned} \psi'_1 &= \psi_1 \\ \psi'_2 &= \psi_2 - \left(\int_0^1 \psi'_1 \psi_2 dx \right) \psi'_1 \\ \psi'_3 &= \psi_3 - \left(\int_0^1 \psi'_1 \psi_3 dx \right) \psi'_1 - \left(\int_0^1 \psi'_2 \psi_3 dx \right) \psi'_2 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\psi'_1, \psi'_2, \psi'_3, \text{ etc...} \\ &\text{son ortogonales} \end{aligned}$$

3.4.3. Desarrollo en serie de la función de Green

$$\begin{cases} L(x) = \delta(x-x_0) \\ \text{c.c.} \end{cases}$$



La ventaja de este método estriba en que, mediante el desarrollo en serie de Fourier generalizada de la función de Green, se define ésta por medio de una única expresión vá lida para ambos tramos.

EJEMPLO 1

Hallar, mediante desarrollo en serie de Fourier - generalizada, la función de Green de:

$$EA \frac{d^2 u_x}{dx^2} - Kd u_x + \delta(x-x_0) = 0$$

$$\text{c.c.} \quad \left\{ \begin{array}{l} u_x = 0, \text{ en } x = 0 \\ \frac{du_x}{dx} = 0, \text{ en } x = 1 \end{array} \right. \left| \begin{array}{l} \psi_n(x) = \text{sen} \mu_n x ; \text{ con } \mu_n = \frac{(2n-1)\pi}{2l} \\ \lambda_n = \frac{\sqrt{EA}}{l} \sqrt{(\mu_n l)^2 + \alpha^2}; \text{ con } \alpha = l \sqrt{\frac{Kd}{EA}} \end{array} \right.$$

Desarrollando $\delta(x-x_0)$ en serie de Fourier generalizada:

$$\delta(x-x_0) = \sum p_n \psi_n(x) ; \quad p_n = \frac{\int_0^1 \delta(x-x_0) \psi_n(x) dx}{\int_0^1 \psi_n^2(x) dx} = \frac{\psi_n(x_0)}{\int_0^1 \psi_n^2(x) dx}$$

es decir:

$$p_n = \frac{2}{l} \text{sen}(\mu_n x_0)$$

O lo que es igual

$$\delta(x-x_0) = \frac{2}{l} \sum_1^{\infty} \text{sen}(\mu_n x_0) \text{sen} \mu_n x$$

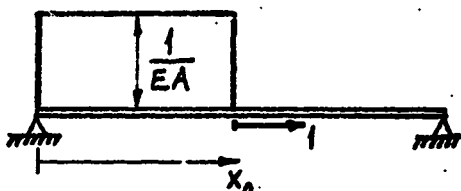
que no es convergente.

Sin embargo

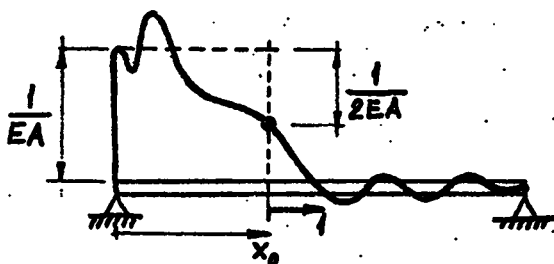
$$u_x = G(x, x_0) = - \frac{2}{l} \sum_1^{\infty} \frac{\text{sen}(\mu_n x_0) \text{sen} \mu_n x}{\lambda_n^2}$$

sí es convergente.

La derivada $\frac{du_x}{dx}$ tiene un salto, tal como puede verse en la figura



Al utilizar un desarrollo en serie, que en realidad es un método aproximado, la figura anterior se transforma en la que sigue:



3.4.4. Solución particular y solución complementaria

La solución de la ecuación diferencial puede ser obtenida como suma de una solución particular y la solución complementaria, es decir, la solución de la ecuación diferencial con el segundo miembro igual a cero.

$$u_x = u_x^0 + u_x^c \quad \begin{cases} u_x^0 = \text{S.P.} \\ u_x^c = \text{S.C.} \end{cases}$$

La solución particular no tiene porqué satisfacer las condiciones de contorno y puede ser obtenida por desarrollo en serie cuando la dificultad del problema así lo haga aconsejable.

EJEMPLO 1

Resolver la ecuación diferencial siguiente mediante desarrollo en serie de la solución particular.

$$EA \frac{d^2 u_x}{dx^2} + Kd u_x + p_x = 0 ; p_x = \text{cte} ; \text{ c.c. } \begin{cases} u_x = 0 & \text{en } x = 0 \\ \frac{du_x}{dx} = 0 & \text{en } x = 1 \end{cases}$$

Solución complementaria:

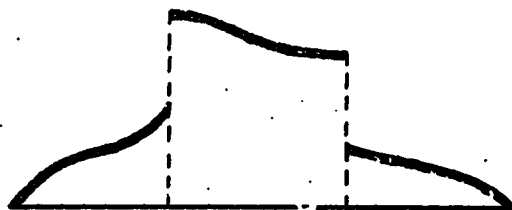
$$u_x^c = C_2 \operatorname{sen} \lambda x + C_1 \operatorname{cos} \lambda x ; \text{ con } \lambda = \sqrt{\frac{Kd}{EA}}$$

Solución particular:

$$u_x^0 = \frac{p}{Kd} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi^2} \frac{1}{n^2 - \alpha^2} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l} \quad \begin{cases} \alpha = \lambda l \\ n = 2+1 \end{cases}$$

Esta solución particular satisface la ecuación diferencial pero no las condiciones de contorno.

NOTA: Si la carga fuese del tipo



se podría resolver el problema trabajando con diferentes trozos, pero es mejor solución proceder al desarrollo en serie de Fourier.

$$x = 0 ; \quad u_x^0 = 0 ; \quad \text{sí satisface c.c.}$$

$$x = 1 ; \quad \frac{du_x^0}{dx} = \frac{4p}{lKd} \sum_{1,3,\dots} \frac{(-1)^n}{(n\pi/\alpha)^2 - 1}$$

En lo que sigue, se consideran únicamente $n=1,3$ y $\alpha=1$.

$$\left. \frac{du_x^0}{dx} \right\}_{x=1} = 0.497 \frac{p_1}{EA} ;$$

$$u_x = u_x^0 + u_x^c \quad \text{C.C.} \quad \begin{cases} x = 0 \rightarrow C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 0 + 0 = 0 \\ x = 1 \rightarrow \lambda(-C_1 \text{sen} \lambda 1 + C_2 \text{cos} \lambda 1) + 0.497 \frac{p_1}{EA} = 0 \end{cases}$$

$$\underline{C_1 = 0} \quad \underline{C_2 = 0.92 \, p_1^2 / EA}$$

Por lo tanto:

$$u_x = \frac{pl^2}{EA} \left\{ -0.92 \sin \frac{x}{l} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1,3,\dots} \frac{1}{n^2 - 1} \sin \frac{n\pi x}{l} \right\}$$

3.5. TECNICAS DE RESOLUCION INDIRECTA DE LA ECUACION DIFERENCIAL

3.5.1. Método de Rayleigh - Ritz

La ecuación diferencial y las condiciones de contorno de la barra recta pueden ser sustituidas por un problema de extremales correspondiente a la minimización de la energía potencial total del sistema.

La solución exacta se puede aproximar como sigue:

$$u_x \approx u_x^{(N)} = \sum_{n=1}^N a_n^{(N)} \phi_{xn}$$

siendo ϕ_{xn} un conjunto de funciones admisibles o compatibles, es decir, continuas y que satisfacen las condiciones cinemáticas o esenciales del problema.

Además, dichas funciones han de constituir un sistema completo, es decir, que la solución real se puede aproximar con un cierto error medido en forma cuadrática. Se cumple, por

lo tanto

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^1 \{u_x - \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(N)} \phi_{xn}\}^2 dx = 0$$

Sin embargo, en un cierto punto, el error local, medido por la diferencia

$$u_x - \sum_n^{(N)} a_n \phi_{xn}$$

puede no estar acotado.

La energía potencial total es un funcional:

$$V(u_x) = \int_0^1 \left\{ \frac{1}{2} EA_x \left(\frac{du_x}{dx} \right)^2 - p_x u_x \right\} dx$$

Las funciones ϕ_{nx} son datos que se han de elegir a priori.

Los parámetros $a_n^{(N)}$ son incógnitas que se determinan como se indica a continuación:

$$V^N = V(u_{..}) = V(a_n^{(N)})$$

Recogiendo los parámetros $a^{(N)}$ en forma de vector.

$$\underline{a}^T = \{a_1^{(N)} \ a_2^{(N)} \ \dots \ a_N^{(N)}\}$$

se puede expresar

$$V^N = V(a_n^{(N)}) = \frac{1}{2} K_{ij}^{(N)} a_i^{(N)} a_j^{(N)} + b_i^{(N)} a_i^{(N)}$$

y en virtud del teorema de la energía potencial mínima:

$$\frac{\partial V^N}{\partial a_i^{(N)}} = 0 ; \quad \forall a_i^{(N)}$$

con lo que se llega a un sistema del tipo

$$K_{ij} a_j + b_i = 0 ; \quad \text{o sea : } \underline{K} \underline{a} + \underline{b} = \underline{0}$$

La resolución del sistema anterior es posible, ya que el problema es autoadjunto, con lo cual \underline{K} es simétrica y positiva definida. De este modo es posible la obtención de las $a_i^{(N)}$.

Por otra parte, se cumple la propiedad monotónica

$$V(a_n^{(N)}) > V(a_n^{(N+1)})$$

es decir

$$v^1 \geq v^2 \geq \dots \geq v^N \neq v_{\text{exacta}}$$

En el límite, se verifica

$$\lim_{N \rightarrow \infty} v^N = v_{\text{exacta}} = v_{\text{mínima}}$$

Estos métodos tienen una característica digna de reseñar que es que, a través de ellos, se obtienen estructuras más rígidas que en la realidad.

EJEMPLO

Resolver, mediante el método de Rayleigh-Ritz, la ecuación diferencial, correspondiente al problema

$$\frac{d}{dx} \left\{ EA \left(\frac{du_x}{dx} \right) \right\} - Kd u_x + p = 0 \quad ; \quad \text{con } u_x = 0 \quad \text{en } x = 0 \text{ y } x = 1$$

de tal modo que las funciones ϕ_{xn} sean polinomios.

El problema anterior equivale a la minimización de la expresión

$$V(u_x) = \int_0^1 \left\{ \frac{1}{2} EA \left(\frac{du_x}{dx} \right)^2 + \frac{1}{2} (Kd) u_x^2 - p u_x \right\} dx$$

$$u_x = 0 \quad \text{en} \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

y se hace

$$u^{(N)} = \sum_{n=1}^N a_n \phi_n(x)$$

Las funciones $\phi_n(x)$ han de cumplir las condiciones siguientes:

a) Para un problema de orden p , han de ser continuas de orden $p-1$, es decir, $\phi_n(x) \in C^{p-1}$.

b) Deben satisfacer individualmente las condiciones esenciales (cinemáticas) de contorno. No así las naturales, pues éstas se cumplen de forma natural al minimizar.

c) El conjunto formado por las $\phi_n(x)$ ha de ser completo.

En estas condiciones, la convergencia que se logra es una convergencia en la media:

En el problema en cuestión, el mayor orden de derivación es 1 (problema de orden 1), por lo que las funciones ϕ_n han de ser continuas simplemente, es decir, ha de exis

tir la derivada primera (continuidad C^0).

Eligiendo las funciones que se indican a continuación, se tiene:

$$\left. \begin{array}{l} \phi_{x1} = x(1-x) \\ \phi_{x2} = x(1-x)x \\ \phi_{x3} = x(1-x)x^2 \\ \dots\dots\dots \\ \phi_{xn} = x(1-x)x^{n-1} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Estas funciones satisfacen las condiciones} \\ \text{esenciales de contorno.} \\ \text{Forman un conjunto completo, ya que:} \\ x(1-x) (a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \dots) = 0 \\ \text{implica} \\ a_2 = a_2 = a_3 = \dots = 0 \end{array}$$

En este supuesto:

$$k_{mn} = EA \int_0^1 \phi'_{xm} \phi'_{xn} dx = EA \int_0^1 \{m x^{m-1} - (m+1)x^m\} \{n x^{n-1} - (n+1)x^n\} dx$$

$$b_n = \int_0^1 p \phi_{xn} dx = p \int_0^1 x^n (1-x) dx$$

$$\bar{k}_{mn} = Kd \int_0^1 \phi_{xm} \phi_{xn} dx = Kd \int_0^1 x^{m+n} (1-x)^2 dx$$

Por lo tanto:

$$\frac{1}{2} (k_{mn} + \bar{k}_{mn}) a_n^{(N)} a_m^{(N)} - b_n a_n^{(N)} = v(a)$$

Y derivando respecto de $a_n^{(N)}$ queda:

$$\Sigma (k_{mn} + \bar{k}_{mn}) a_n^{(N)} - b_n = 0 \quad \forall n=1,2,\dots,N$$

Aplicación: $N = 1 \rightarrow u_x = a_1 \phi_{x1}$

Englobando en un solo término k_{mn} y \bar{k}_{mn} , se tiene:

$$k_{11} = EA \int_0^1 (1-2x)^2 dx + Kd \int_0^1 x^2 (1-x)^2 dx = EA \frac{1^3}{3} + Kd \frac{1^5}{30}$$

$$b_1 = p \int_0^1 x(1-x) dx = \frac{1^3}{6} p$$

$$k_{11} \cdot a_1 = b_1 \rightarrow a_1 = \frac{p}{2EA + 0.2 Kd l^2} ; \quad \alpha = l \sqrt{\frac{Kd}{EA}}$$

$$u_x = \frac{p}{Kd} \frac{\alpha^2}{2 + 0.2\alpha^2} \frac{x}{l} \left(1 - \frac{x}{l}\right) ; \quad N_x = pl \frac{1}{2 + 0.2\alpha^2} \left(1 - \frac{2x}{l}\right) \text{ (lineal)}$$

EJEMPLO:

$$\frac{d^2 u}{dx^2} - u + x = 0 ; u(0) = u(1) = 0$$

Con $N = 1$, resulta, para $EA = p = Kd = 1 : u^{(1)} = \frac{5}{18}x(1-x)$

con $N = 2 : a_1^{(2)} = \frac{71}{369} ; a_2^{(2)} = \frac{7}{41} \rightarrow u_z^{(2)} = x(1-x) \left\{ \frac{71}{369} + \frac{7}{41} x \right\}$

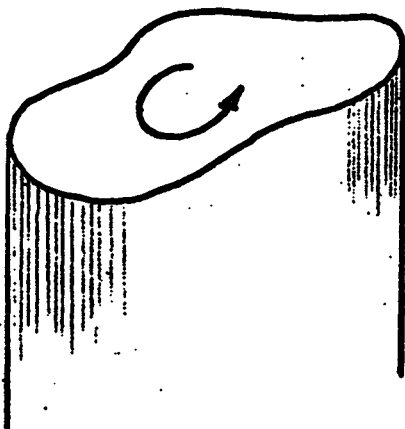
Comparando los resultados con u_{exacta} .

x/l	u_{exacta}	$u^{(1)}$	$u^{(2)}$
1/4	0.044	0.052	0.044
1/2	0.070	0.069	0.069
3/4	0.060	0.052	0.060

3.5.2. Método de las funciones a cruzos: Elementos Finitos

El inconveniente del método de Rayleigh-Ritz (en placas, por ejemplo) estriba en que encontrar las ϕ_n que satisfagan las condiciones de contorno es prácticamente tan difícil como resolver la ecuación diferencial.

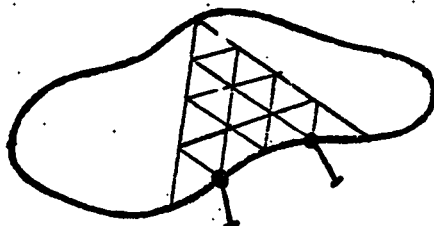
Los matemáticos (Courant, 1947), al plantearse la resolución del problema de la torsión de una viga:



$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - 2G\theta = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{El funcional debe} \\ \text{ser de 1er grado:} \\ \text{Problema C}^\circ. \end{array} \right.$$

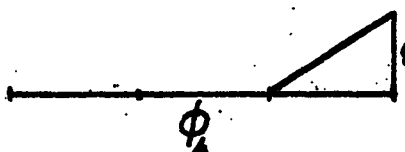
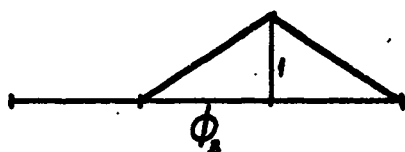
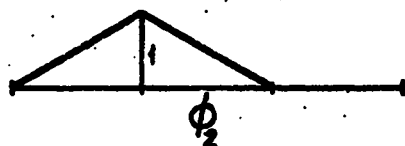
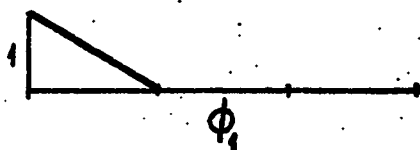
C. C.

llegaron a la idea de dividir el dominio de cálculo en pedazos, definiendo funciones distintas en cada uno de ellos, exigiendo solamente continuidad en el contorno:



EJEMPLO 1

Resolver la ecuación $\frac{d^2 u_x}{dx^2} + u_x + x = 0$ mediante funciones a trozos.



$$\forall \phi_i \in C^0$$

Las funciones ϕ_i elegidas son funciones con soporte compacto. Es de señalar que ϕ_1 y ϕ_4 no cumplen las condiciones esenciales, que se introducen posteriormente.

$$u_x = a_1 \phi_1(x) + a_2 \phi_2(x) + a_3 \phi_3(x) + a_4 \phi_4(x)$$

Por ejemplo, a_2 es el valor de u_x para $x=1/3$, es decir u_2

Obtención de algunos k_{ij} :

$$k_{13} = EA \int_0^1 \phi_1' \phi_3' dx - \int_0^1 (Kd) \phi_1 \phi_3 dx = 0$$

$$k_{23} = EA \int_0^1 \phi_2' \phi_3' dx - \int_0^1 Kd \phi_2 \phi_3 dx$$

En realidad, la forma usual de trabajar es realizando la integración por elementos:

$$V(u_x) = \int_0^1 = \int_0^{1/3} + \int_{1/3}^{21/3} + \int_{21/3}^1$$

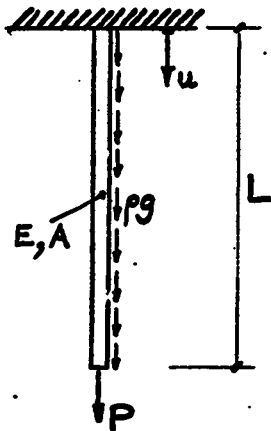
En la segunda integral se hace el cambio $x' = x + \frac{1}{3}$ y en la tercera $x' = x + 21/3$, con lo que queda finalmente:

$$V(u_x) = \int_0^1 = \int_0^{1/3} + \int_0^{1/3} + \int_0^{1/3}$$

Para cada elemento, se halla $(k_{23})_e$, es decir, la contribución de cada elemento a k_{23} (matriz de rigidez del elemento). Posteriormente, se realiza el ensamblaje de todos los elementos entre sí, mediante técnicas de cálculo matricial de estructuras, imponiéndose, por último las condiciones de contorno.

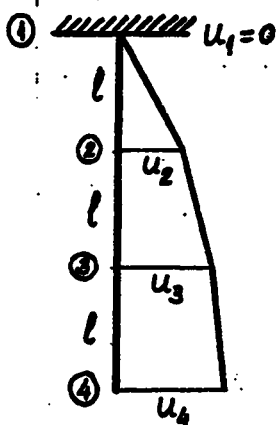
EJEMPLO 2

Resolver, mediante el método de las funciones a trozos el problema de la figura.



$$V = \int_0^L \left\{ \frac{1}{2} EA \left(\frac{du}{dx} \right)^2 - p g u \right\} dx - P \cdot u \Big|_{x=L}$$

Se toman tres elementos



$$u_x = u_1 + \frac{u_j - u_1}{l} x; \quad \forall x \in (x_1, x_j)$$

$$\frac{du_x}{dx} = \frac{u_j - u_1}{l}$$

$$V = \int_0^{L/3} + \int_{L/3}^{2L/3} + \int_{2L/3}^L - P u_4$$

Operando: $V = \Sigma$ contribuciones de energía de cada elemento.

$$V^{(4)} = \Sigma V^{(e)} = \frac{EA}{2L} \underbrace{(2u_2^2 + 2u_3^2 - 2u_2u_3 + u_4^2 - 2u_3u_4)}_{\text{Forma cuadrática}} - P u_4 - 2C(u_2 + u_3 + \frac{u_4}{2})$$

siendo

$$C = \frac{A l \rho g}{2}$$

En las expresiones anteriores ya ha sido tenida en cuenta la condición de contorno $u_1 = 0$.

Derivando respecto de cada u_i resulta:

$$\frac{\partial V}{\partial u_2} = 0 \rightarrow \frac{EA}{L} (2u_2 - u_3) = 2C$$

$$\frac{\partial V}{\partial u_3} = 0 \rightarrow \frac{EA}{L} (2u_3 - u_2 - u_4) = 2C$$

$$\frac{\partial V}{\partial u_4} = 0 \rightarrow \frac{EA}{L} (L u_4 - L u_3) = P + C$$

Solución aproximada:

$$\frac{AE}{L} u_2 = 5C + P$$

$$\frac{AE}{L} u_3 = 8C + 2P$$

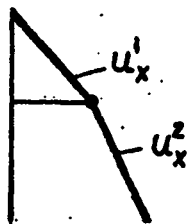
$$\frac{AE}{L} u_4 = 9C + 3P$$

Solución exacta:

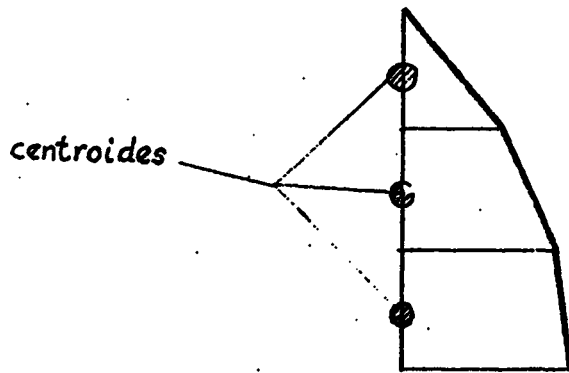
$$\left(\frac{AE}{L}\right) u_{\text{exacta}} = P \frac{x}{L} + C\left\{6 \frac{x}{L} - \left(\frac{x}{L}\right)^2\right\}$$

Comparando la solución exacta con la aproximada, se observa que los desplazamientos en los nudos 1, 2, 3 y 4 son exactos.

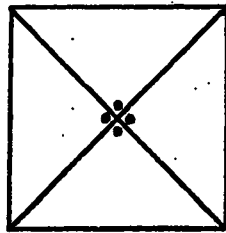
En cuanto a los esfuerzos $N_x = \frac{EA}{L} \frac{du}{dx}$ existen dos posibles valores, según la u que se tome (ver figura). Una solución consiste en tomar la senisuma.



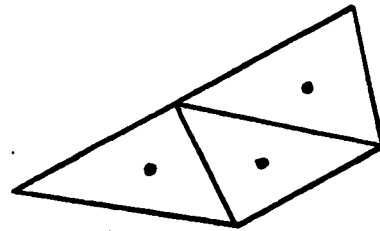
Si el esfuerzo se toma en los puntos medios (centroídes de cada elemento), los resultados son exactos, pero existe el inconveniente de que los resultados en el contorno, que a veces interesan, no aparecen en esta situación:



Para los nudos internos, se hace el promedio, y para el contorno se toman los resultados en los centroides y luego se extrapola.



nudos internos



Contorno

Hoy en día, se toman los esfuerzos en los puntos de integración de Gauss.

El método de Rayleigh-Ritz pasa de la ecuación diferencial a una funcional y sólo puede ser aplicado a problemas autoadjuntos (conservativos), por lo que no es válido para problemas de pandeo con seguimiento, o en estructuras neumáticas por ejemplo. Sin embargo, existen otros métodos que no exigen el paso a un funcional, métodos que se indican a continuación.

3.5.3. Método de Galerkin

La idea de este método consiste en hacer mínima una función error.

Sea resolver el problema:

$$AE \frac{d^2 u}{dx^2} + p = 0 ; \text{ con las c.c. } \begin{cases} x=0 \rightarrow u=0 \\ x=1 \rightarrow u=0 \end{cases}$$

Se hace:

$$u = \underbrace{x(1-x)}_{\psi(x)} a ; \quad \frac{du}{dx} = (1-2x)a ; \quad \frac{d^2 u}{dx^2} = -2a$$

La función error es: $\epsilon = AE(-2a) + p$

Si se hubiese considerado $\psi(x) = \sin \frac{\pi x}{1}$ +

$$\epsilon = -\frac{\pi^2}{1^2} AE a \sin \frac{\pi x}{1} + p.$$

La idea consiste en hacer ϵ lo más pequeña posible, es decir:

$$\int_0^1 \epsilon \psi(x) dx = 0$$

En un caso más general:

$$u^{(N)} = \sum_{n=1}^N a_n \psi_n(x) \text{ siendo } \psi_n(x) \text{ funciones especificadas.}$$

La función error es:

$$\varepsilon(u^{(N)}) = L(u^{(N)}) - p$$

Las a_n , desconocidas, se calculan como sigue:

$$\int_0^1 \varepsilon \psi_n(x) dx = 0 ; \quad \forall n = 1, 2, \dots, N$$

En realidad, el proceso equivale a la obtención de un vector normal a N vectores en un espacio N -D, lo cual implica que dicho vector sea cero.

Es de señalar que, en el caso de un problema de orden p , se exige que $\psi_n(x) \in C^p$.

Si el problema es autoadjunto, los métodos de Rayleigh-Ritz y Galerkin coinciden.

EJEMPLO

Resolver, mediante el método de Galerkin, el problema siguiente:

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + u + x = 0 ; \quad \text{c.c.} \begin{cases} x = 0 \rightarrow u = 0 \\ x = 1 \rightarrow u = 0 \end{cases}$$

a) Una incógnita.

Se toma:

$$u = a_0 x(1-x) \rightarrow u' = a_0(1-2x); \quad u'' = -2 a_0$$

$$\varepsilon = a_0(-2 + 1x - x^2) + x; \quad \int_0^1 \varepsilon \psi \, dx = 0$$

es decir:

$$\int_0^1 \{a_0(-2 + 1x - x^2) + x\}x(1-x) \, dx = 0 \rightarrow \frac{3}{10} a_0 - \frac{1}{12} = 0$$

$$a_0 = \frac{5}{18}$$

b) 2. incógnitas.

$$u = a_0 x(1-x) + a_1 x^2(1-x) = a_0 \psi_1(x) + a_1 \psi_2(x); \quad \frac{d^2 u}{dx^2} = a_0(-2) + a_1(21-3x)$$

$$\int_0^1 \{a_0(-2+1x-x^2) + a_1(21-3x+x^21-x^3) + x\}x(1-x) \, dx = 0$$

$$\int_0^1 \{a_0(-2+1x-x^2) + a_1(21-3x+x^21-x^3) + x\}x^2(1-x) \, dx = 0$$

Las dos integrales anteriores constituyen dos ecuaciones que son linealmente independientes si lo son $\psi_1(x)$ y $\psi_2(x)$.

En este caso se cumple dicha independencia y resulta:

$$\frac{3}{10} a_0 + \frac{3}{20} a_1 = \frac{1}{12}$$

$$\frac{3}{20} a_0 + \frac{13}{105} a_1 = \frac{1}{20}$$

Resolviendo el sistema anterior, se tiene, finalmente:

$$a_0 = \frac{71}{369} ; \quad a_1 = \frac{7}{41}$$

3.5.4. Método de las funciones pesantes

Se trata de un método exactamente igual al de Galerkin, pero eligiendo unas funciones ψ_n diferentes que cumplan tan sólo la condición de ser linealmente independientes, y obligando a la condición:

$$\int_0^1 \epsilon \psi_n(x) dx = \langle \epsilon, \psi_n \rangle = 0 ; \quad \forall n = 1, 2, \dots, N$$

3.5.5. Método de colocación

Se plantea una solución aproximada y se minimiza

el error, bien de dentro del dominio o en el contorno. Lo normal es obligar a que el error sea mínimo en un conjunto de puntos:

$$u \approx u^{(N)} = \sum_{n=1}^N a_n \varphi_n; \quad \varepsilon^{(N)} = L u^{(N)} - p; \quad \forall x \in (0,1)$$

$$\int_0^1 \{L u^{(N)}(x) - p\} \delta(x-x_i) dx = 0; \quad \text{siendo } x_i \text{ el conjunto de puntos elegido.}$$

Sea el problema

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + u + x = 0; \quad \text{c.c.} \quad \begin{cases} x=0 \rightarrow u=0 \\ x=1 \rightarrow u=0 \end{cases}$$

$$a) \quad u_1 = a_1 x(1-x); \quad \varepsilon = a_1 (-2 + x) - x^2 + x$$

Suponiendo que $l=1$ y obligando a que $\varepsilon=0$ para $x=\frac{1}{2}$, resulta:

$$\{a_1 \left(-2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2}\} = 0 \rightarrow a_1 = \frac{2}{7} \rightarrow u^{(1)} = \frac{2}{7} x(1-x) \text{ (con } l=1).$$

$$b) \quad u^{(2)} = a_1 (1-x)x + a_2 x^2 (1-x); \quad \varepsilon^{(2)} = (-2+x-x^2)a_1 + (2-6x+x^2-x^3)a_2 + x$$

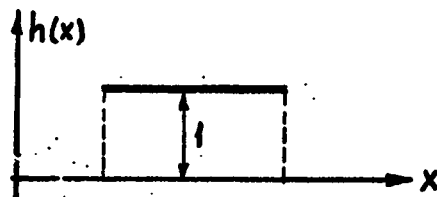
Obligando a que $\varepsilon^{(2)}=0$, para $x=\frac{1}{3}$ y $x=\frac{2}{3}$, queda:

$$\left. \begin{aligned} (-2 + \frac{1}{3} - \frac{1}{9})a_1 + (2 - \frac{6}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27})a_2 + \frac{1}{3} &= 0 \\ (-2 + \frac{2}{3} - \frac{4}{9})a_1 + (2 - \frac{12}{3} + \frac{4}{9} - \frac{8}{27})a_2 + \frac{2}{3} &= 0 \end{aligned} \right\} a_1 = \frac{81}{416}, a_2 = \frac{72}{416}$$

x	u _{exacta}	u ⁽¹⁾	u ⁽²⁾
1/4	0.044014	0.05357	0.04462
1/2	0.069747	0.07143	0.07031
3/4	0.060056	0.05357	0.06085

3.5.6. Método de las regiones

Consiste en hacer nulo el error medio en ciertas regiones definidas a priori:



$$\int_{x_1}^{x_j} \epsilon^{(N)}(x) h(x) dx = 0$$

En el caso anterior:

$$N = 1: \int_0^1 \epsilon^{(1)} dx = 0 ; N = 2 \left\{ \begin{aligned} \int_0^{1/2} \epsilon^{(2)} dx &= 0 \\ \int_{1/2}^1 \epsilon^{(2)} dx &= 0 \end{aligned} \right. \quad \text{ó bien} \quad \left\{ \begin{aligned} \int_0^{1/2} \epsilon^{(2)} dx &= 0 \\ \int_{1/2}^1 \epsilon^{(2)} dx &= 0 \end{aligned} \right.$$

EJEMPLO

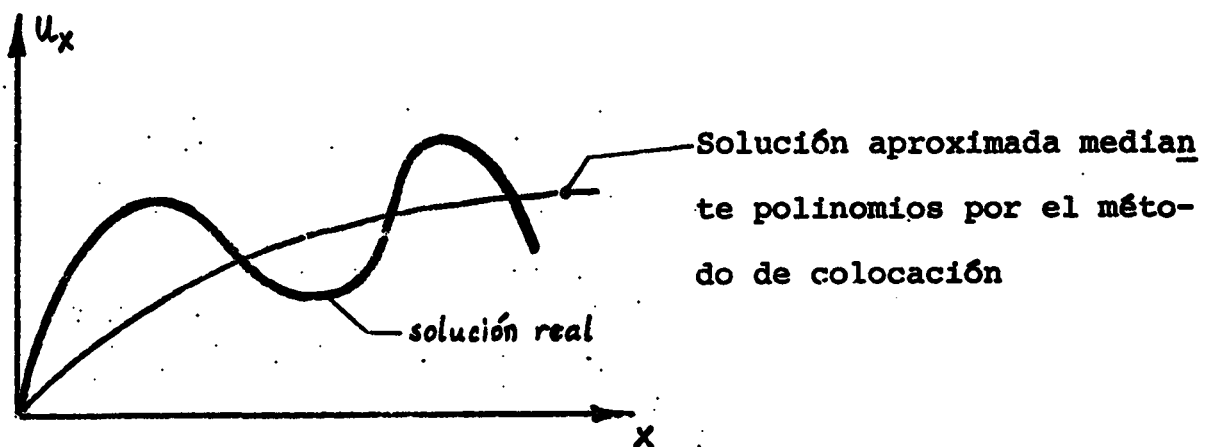
$$\frac{d^2 u}{dx^2} + u + x = 0; \quad \text{c.c.} \begin{cases} x=0 \rightarrow u=0 \\ x=1 \rightarrow u=0 \end{cases}$$

$$u^{(1)} = a_1 x(1-x); \quad \int_0^1 \epsilon^{(1)} dx = 0 \rightarrow u^{(1)} = \frac{3}{11} x(1-x)$$

$$u^{(2)} = a_1 x(1-x) + a_2 x^2(1-x); \quad \begin{cases} \int_0^1 \epsilon^{(2)} dx = 0 \\ \int_0^{1/2} \epsilon^{(2)} dx = 0 \end{cases} \quad \left| \quad u^{(2)} = \frac{37}{517} x(1-x) + \frac{88}{517} x^2(1-x) \right.$$

x	u ⁽¹⁾	u ⁽²⁾	u _{exacta}
1/4	0.05114	0.043157	0.044014
1/2	0.06818	0.068182	0.069747
3/4	0.05114	0.059119	0.060056

Problemas especiales



Al llegar a este punto, es preciso citar unas características de los métodos de colocación y de las regiones.

Un inconveniente del método de colocación es que para soluciones del tipo representado en la figura, si se aproximan mediante polinomios, aparecen "ruidos". En este aspecto el método de las regiones es mejor, pues suaviza dichos ruidos.

3.5.7. Métodos de Trefft y de la integral de contorno (Boundary element method)

Ambos métodos serán vistos más adelante. Es de señalar que el segundo reduce la dimensionalidad del problema, pero conduce a matrices llenas.

3.5.8. Método de los MINIMOS CUADRADOS

Este método es el óptimo. Exige operar más que con los anteriores, pero los resultados de interés en el cálculo (esfuerzos, por ejemplo) son más exactos.

El método consiste en lo siguiente:

Sea el problema :

$$\begin{cases} L u - p = 0 \\ \text{c.c. en } (0,1) \end{cases}$$

Se define:

$$\varepsilon^{(N)} = L u^{(N)} - p;$$

siendo

$$u \approx u^{(N)} = \sum_{n=1}^N a_n \psi_n(x)$$

Y se minimiza la expresión:

$$\int_0^1 \varepsilon^{(N)} \cdot \varepsilon^{(N)} dx = \langle L u^{(N)} - p, L u^{(N)} - p \rangle$$

es decir, se llega a N ecuaciones, mediante:

$$\frac{\partial}{\partial a_n} \left[\int_0^1 \varepsilon^{(N)} \varepsilon^{(N)} dx \right] = 0; \quad \forall n = 1, 2, \dots, N$$

El método equivale a tomar como funciones de peso $L \psi_n$, por lo tanto, exige que existan dichas $L \psi_n$.

EJEMPLO

Resolver:

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + u + x = 0 ; \text{ c.c. } \begin{cases} x=0 \rightarrow u=0 \\ x=1 \rightarrow u=0 \end{cases}$$

$$a) \cdot u^{(1)} = a_1 x(1-x); \quad \epsilon^{(1)} = a_1 (-2+x-x^2) + x; \quad \frac{\partial}{\partial a_1} \int_0^1 \epsilon^{(1)} \epsilon^{(1)} dx = 0$$

$$\int_0^1 \epsilon^{(1)} \{-2+x-x^2\} dx = 0 \rightarrow a_1 = \frac{385}{1414}$$

$$b) \cdot u^{(2)} = a_1 x(1-x) + a_2 x^2(1-x); \quad \epsilon^{(2)} = (-2+x-x^2)a_1 + (2-6x+x^2-x^3)a_2 + x;$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial a_1} \int_0^1 \epsilon^{(2)} \epsilon^{(2)} dx &= \int_0^1 \epsilon^{(2)} (-2+x-x^2) dx = 0 \\ \frac{\partial}{\partial a_2} \int_0^1 \epsilon^{(2)} \epsilon^{(2)} dx &= \int_0^1 \epsilon^{(2)} (2-6x+x^2-x^3) dx = 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} a_1 &= \frac{448}{101 \cdot 2437} \\ a_2 &= \frac{413}{2437} \end{aligned}$$

x	u _{exacta}	u ⁽¹⁾	u ⁽²⁾
1/4	0.044014	0.05105	0.04311
1/2	0.069747	0.06807	0.06807
3/4	0.060056	0.05105	0.05900

Aunque la aproximación en desplazamientos es análoga e incluso peor a la obtenida mediante otros métodos, - los resultados que se obtienen, mediante este método, para el cálculo de esfuerzos, son mejores que con los otros procedimientos.

4. ESTRUCTURAS 2-D

4.1. TEORIA LINEAL DE PLACAS A FLEXION

4.1.1. Definiciones y tipos de esfuerzos actuantes

Se define una placa como una ley de espesores h a lo largo de una cierta superficie (superficie media) plana: $h(x_1, x_2)$.

Los esfuerzos actuantes son momentos flectores y torsores y esfuerzos cortantes, que se definen por unidad de longitud. Dichos esfuerzos se consideran positivos cuando la tensión que producen en la cara frontal de una rebana cualquiera, correspondiente a la superficie positiva, esto es, $z > 0$ (Figura 4.1), es positiva. Este criterio de signos se denomina "criterio ingenieril".

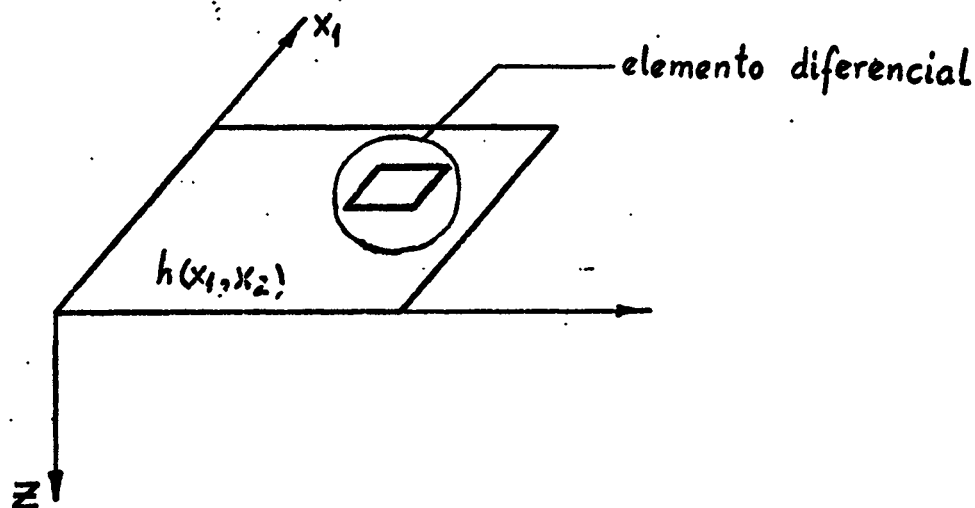


FIG. 4.1

a) Momentos

Se define el momento, por unidad de longitud, m_{ij} , como aquél que actúa en la cara (plano) i y produce tensiones en la dirección j . (Figura 4.2). Sus dimensiones son - m.t/m.

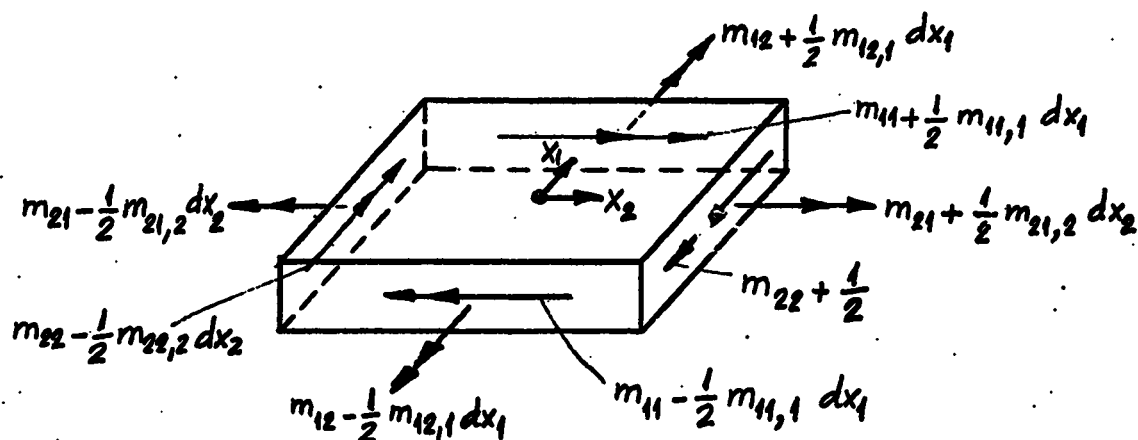


Figura 4.2. Momentos actuantes en una rebanada elemental

b) Esfuerzos cortantes

Se define el esfuerzo cortante, q_j , aquél que actúa en la cara j paralelamente al eje z . (Figura 4.3). Sus dimensiones son t/m.

En estas figuras, i indica derivada respecto a x_1 .

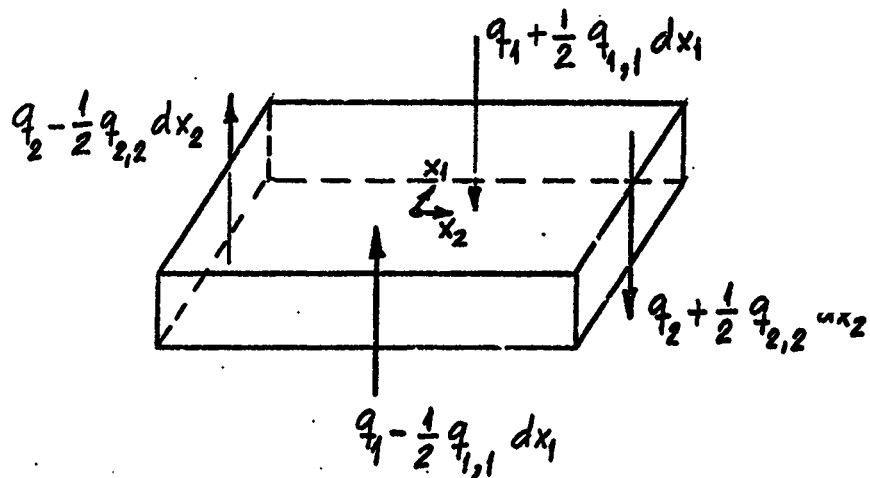


Figura 4.3. Esfuerzos cortantes en una rebanada elemental

4.1.2. Fuerzas exteriores

Las cargas exteriores actuando sobre la placa pueden ser fuerzas o momentos. Se definen por unidad de superficie y se indican en la figura 4.4.

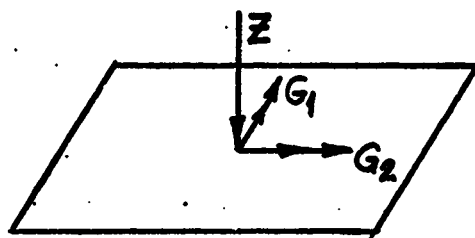


Fig. 4.4

$$z = z(x_1, x_2)$$

$$G_1 = G_1(x_1, x_2)$$

$$G_2 = G_2(x_1, x_2)$$

4.1.3. Ecuación diferencial de la placa

La técnica a seguir es análoga a la seguida para hallar la ecuación diferencial de la viga a flexión, habida cuenta de que se desprecia la deformación por cortante.

1) Ecuaciones de equilibrio:

Teniendo en cuenta las figuras 4.2, 4.3 y 4.4, y planteando el equilibrio de momentos en la dirección x_1 , resulta:

$$m_{11,1} dx_1 dx_2 + m_{21,2} dx_2 dx_1 + G_2 dx_1 dx_2 - q_1 dx_2 dx_1 = 0$$

o lo que es igual:

$$m_{11,1} + m_{21,2} + G_2 - q_1 = 0 \quad (4.1)$$

Análogamente, estableciendo equilibrio de momentos según x_2 :

$$m_{22,2} + m_{12,1} - G_1 - q_2 = 0 \quad (4.2)$$

Ambas ecuaciones pueden ser englobadas en una sola, teniendo en cuenta el criterio de Einstein de suma de índices repetidos:

$$m_{ij,i} = q_j - (-1)^k G_k \quad \begin{array}{l} k \neq j \\ i = 1, 2 \\ j = 1, 2 \end{array} \quad (4.3)$$

Planteando, del mismo modo, el equilibrio de fuerzas verticales, se deduce:

$$q_{1,1} + q_{2,2} + z = 0 \quad (4.4)$$

O lo que es lo mismo:

$$\begin{array}{l} q_{i,i} + z = 0 \\ i = 1, 2 \end{array} \quad (4.5)$$

Ya que la deformación por cortante no se considera (no aparece en las condiciones constitutivas, como se verá), la técnica a seguir consiste en eliminar q entre (4.3) y (4.5). Derivando convenientemente en (4.1) y (4.2), se tiene:

$$\begin{array}{l} m_{11,11} + m_{21,21} + G_{2,1} - q_{1,1} = 0 \\ m_{22,22} + m_{12,12} - G_{1,2} - q_{2,2} = 0 \end{array}$$

Y, a partir de (4.5), resulta:

$$m_{11,11} + m_{21,21} + m_{22,22} + m_{12,12} + G_{2,1} - G_{1,2} + z = 0$$

Si se llama:

$$Z^* = Z + G_{2,1} - G_{1,2} \quad (4.6)$$

queda finalmente:

$$m_{ij,ij} + Z^* = 0 \quad (4.7)$$

$$\left. \begin{array}{l} i = 1, 2 \\ j = 1, 2 \end{array} \right\} \text{Sumatorio en } i \text{ y } j$$

2) Relaciones entre esfuerzos y tensiones

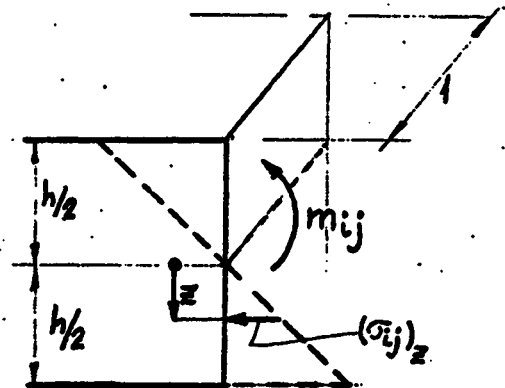
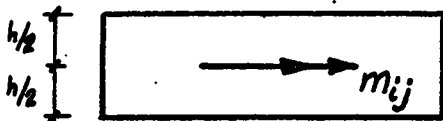


Fig. 4.5

A partir de la figura 4.5, se deduce la relación entre el momento m_{ij} y la tensión correspondiente σ_{ij} como sigue:

$$m_{ij} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_{ij})_z z \, dx.1 \quad (4.8)$$

Además, la deformación según el eje z es despreciable, por lo que se cumple que no hay fuerzas actuantes en el plano de la placa:

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_{ij})_z dz \cdot 1 = 0$$

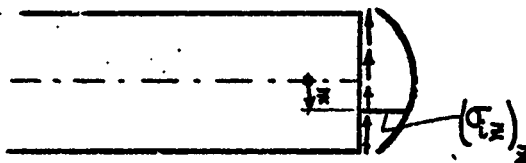


Fig. 4.6

Análogamente, según la figura 4.6, se deduce la relación entre esfuerzos cortantes y tensiones tangenciales, como sigue:

$$q_i = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_{iz})_z dz \cdot 1 \quad (4.9)$$

Por otro lado se cumple que $\sigma_{12} = \sigma_{21}$ (figura 4.7), esto es, $m_{12} = m_{21}$.

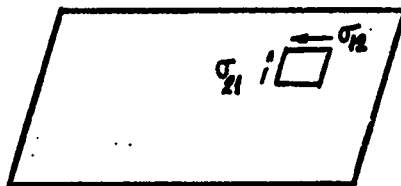


Fig. 4.7

3) Relaciones entre tensiones y deformaciones

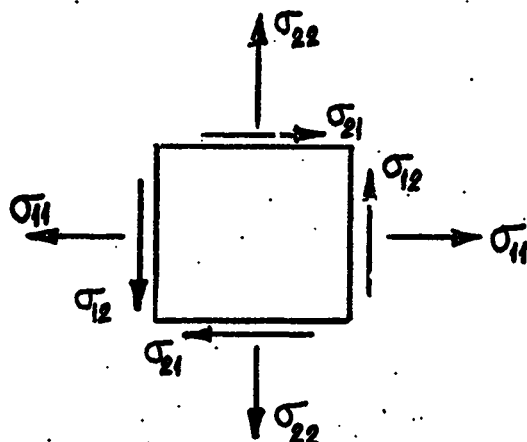


Figura 4.8. Rebanada elemental a un nivel z

Teniendo en cuenta que el problema que se está tratando es un problema de elasticidad plana (figura 4.8), a un nivel z cualquiera se cumple:

$$(\sigma_{11})_z = \frac{E}{1-\nu^2} \{ (\epsilon_{11})_z + \nu(\epsilon_{22})_z \}$$

$$(\sigma_{22})_z = \frac{E}{1-\nu^2} \{ (\epsilon_{22})_z + \nu(\epsilon_{11})_z \} \quad (4.10)$$

$$(\sigma_{12})_z = (\sigma_{21})_z = G(\epsilon_{12})_z = G(\epsilon_{21})_z$$

4) Relaciones entre deformaciones y desplazamientos

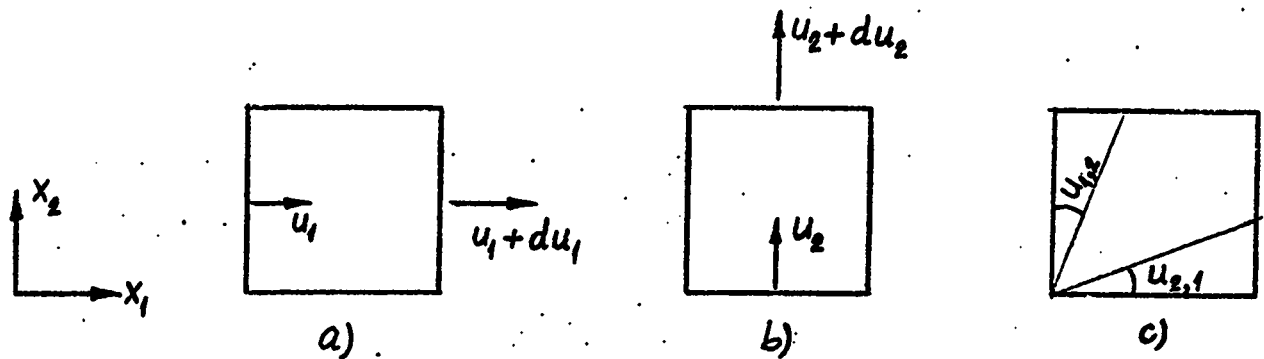


Fig. 4.9

A partir de la figura 4.9, se deducen las siguientes relaciones:

$$\epsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = u_{1,1}$$

$$\epsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = u_{2,2}$$

$$\epsilon_{12} = \frac{1}{2}(u_{1,2} + u_{2,1})$$

o bien:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (4.11)$$

Eliminando $u_{i,j}$, se deduce, fácilmente:

$$\epsilon_{11,22} + \epsilon_{22,11} - 2\epsilon_{12,12} = 0 \quad (4.12)$$

La anterior ecuación de compatibilidad establece una relación entre los tres ϵ_{ij} , es decir, éstos no son linealmente independientes, ya que, conocidos dos desplazamientos, queda fijado el problema.

5) Hipótesis cinemática de Kirchhoff

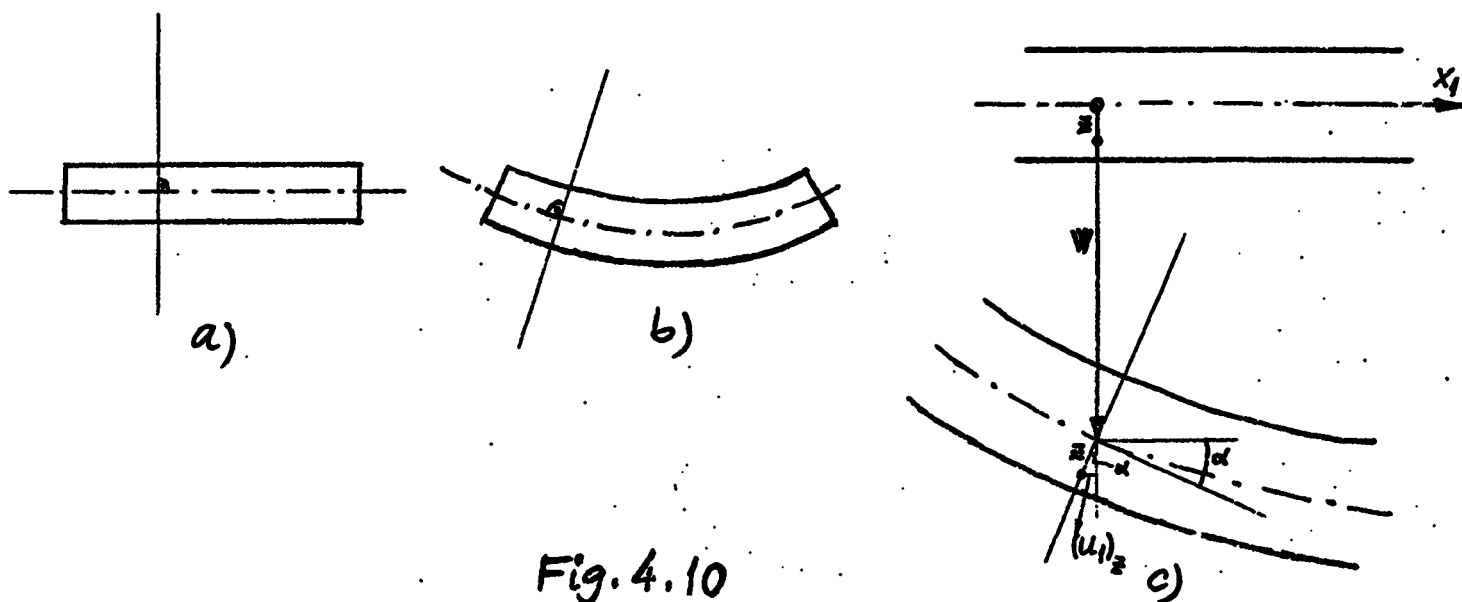


Fig. 4.10

Las normales a la placa antes de la deformación se siguen manteniendo rectas y normales después de la misma (figuras 4.10-a y 4.10-b).

A partir de la figura 4.10-c se obtiene:

$\alpha = \frac{\partial w}{\partial x_1} = w,1$; y, por lo tanto, considerando que el ángulo α es muy pequeño:

$$(u_1)_z = -z \operatorname{sen} \alpha \approx -z \alpha = -z w_{,1} \quad (4.13)$$

Análogamente:

$$(u_2)_z = -z w_{,2} \quad (4.14)$$

De estas dos últimas ecuaciones y de (4.11) se deriva:

$$(\epsilon_{11})_z = -z w_{,11} ; (\epsilon_{22})_z = -z w_{,22} ; (\epsilon_{12})_z = -z w_{,12}$$

es decir:

$$(\epsilon_{ij}) = -z w_{,ij} \quad (4.15)$$

6) Ecuaciones constitutivas a nivel de tensiones

Sustituyendo las expresiones (4.15) en (4.10), queda:

$$\begin{aligned} (\sigma_{11})_z &= -\frac{Ez}{1-\nu^2} \{w_{,11} + \nu w_{,22}\} \\ (\sigma_{22})_z &= -\frac{Ez}{1-\nu^2} \{w_{,22} + \nu w_{,11}\} \\ (\sigma_{12})_z &= -Gz w_{,12} \end{aligned} \quad (4.16)$$

7) Condiciones constitutivas a nivel de esfuerzos

Substituyendo las ecuaciones (4.16) en (4.8) y efectuando la integración, resulta:

$$\begin{aligned}m_{11} &= -D\{w_{,11} + \nu w_{,22}\} \\m_{22} &= -D\{w_{,22} + \nu w_{,11}\} \\m_{12} &= -D\{1-\nu\}w_{,12}\end{aligned}\tag{4.17}$$

$$\text{en donde es } D = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)}\tag{4.18}$$

8) Ecuación diferencial

Derivando adecuadamente las relaciones (4.17) y sustituyendo en (4.7), se tiene:

$$-D\{w_{,1111} + \nu w_{,2211} + w_{,2222} + \nu w_{,1122} + 2(1-\nu)w_{,1122}\} + z^* = 0$$

es decir:

$$w_{,1111} + 2w_{,1122} + w_{,2222} = \frac{z^*}{D}\tag{4.19}$$

La anterior ecuación diferencial de la placa guarda

similitud con la ecuación diferencial de la viga a flexión:

$$\frac{d^4 w}{dx^4} = \frac{Z}{EI}$$

Otra manera de expresar la ecuación diferencial de la placa es como sigue:

$$\nabla^4 w = \frac{Z^*}{D} \quad (4.20)$$

En realidad, desde el punto de vista de análisis estructural, el producto $D \cdot \nabla^4$ es una matriz de rigidez.

La ecuación (4.20) se completa con unas condiciones de contorno. Es decir:

$$\begin{cases} D \nabla^4 w = Z^* \longrightarrow \forall (x_1, x_2) \in A \\ \text{c.c.} \longrightarrow \forall (x_1, x_2) \in \bar{A} \end{cases} \quad (4.21)$$

4.1.4. Obtención de esfuerzos y reacciones de Kirchoff

Una vez integrada la ecuación diferencial e impuestas las condiciones de contorno, es decir, una vez obtenida $w(x_1, x_2)$, los momentos se calculan por sustitución en (4.17).

Para hallar los esfuerzos cortantes, se parte de las expresiones (4.1) y (4.2). Según dichas expresiones y (4.17), queda:

$$\begin{aligned} q_1 &= -D\{w_{,111} + w_{,122}\} + G_2 \\ q_2 &= -D\{w_{,222} + w_{,211}\} - G_1 \end{aligned} \quad (4.22)$$

Las reacciones de Kirchhoff son:

$$\begin{aligned} r_1 &= q_1 + m_{12,2} = -D\{w_{,111} + (2-\nu)w_{,122}\} + G_2 \\ r_2 &= q_2 + m_{21,1} = -D\{w_{,222} + (2-\nu)w_{,112}\} - G_1 \end{aligned} \quad (4.23)$$

4.1.5. Comentarios sobre las condiciones de contorno

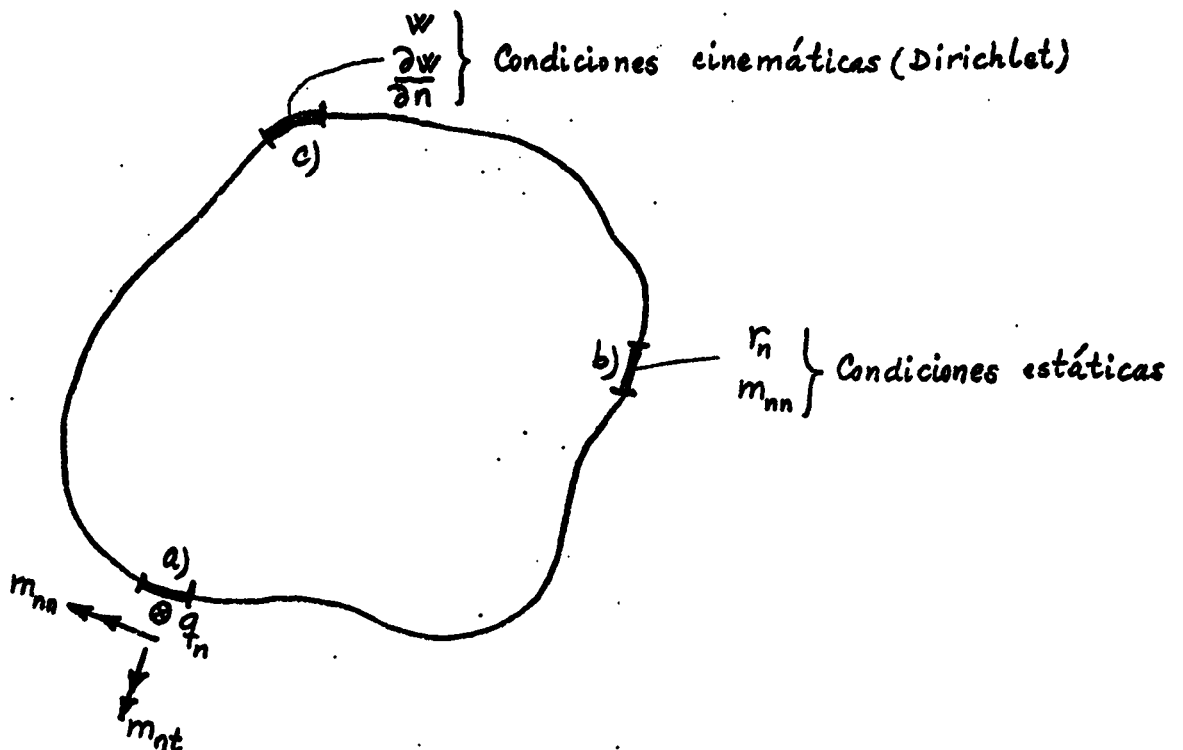


Fig. 4.11

Teniendo en cuenta que en el contorno de la placa existen tres tipos de esfuerzos (momento flector, torsor y esfuerzo cortante), puede parecer que en un cierto caso -- (borde libre, por ejemplo) existirían condiciones super -- abundantes (figura 4.11, a)). Sin embargo, al haber introducido una hipótesis adicional (hipótesis cinemática de Kirchhoff), las tres condiciones se reducen a dos, i.e.

- Momento flector : m_{nn}
- Reacción de Kirchhoff: $r_n = q_n + \frac{\partial m_{nt}}{\partial s}$

Sin embargo, son posibles estudios de la placa, sin consideración de la hipótesis de Kirchhoff, llegándose a una ecuación de 6ª orden y siendo necesarias, por lo tanto, las tres condiciones citadas, (Reissner).

El efecto esquina, desde el punto de vista matemático, aparece debido a la analiticidad del contorno, pues, al tratarse de un contorno anguloso, la derivada $\partial m_{nt}/\partial s$ no existe unívocamente.

4.1.6. Consideración de cargas dinámicas y fundación elástica

En el caso de cargas dinámicas, la ecuación dife-

rencial es:

$$D\nabla^4 w = Z^* (x_1, x_2, t) - \rho h \ddot{w} \quad (4.24)$$

Y en el caso de fundación elástica, con módulo de balasto K, es:

$$D\nabla^4 w = Z^* - Kw \quad (4.25)$$

En lo que antecede, se ha supuesto, como es lo usual, que $h = \text{cte}$. En el caso de que $h = h(x_1, x_2)$, es factible el estudio de placas como la representada en la figura 4.12-a, en cuyo caso $D \neq \text{cte}$, pues $D = D(x_1, x_2)$. Sin embargo, la estructura representada en la figura 4.12-b no es una placa, y no puede ser analizada como tal.

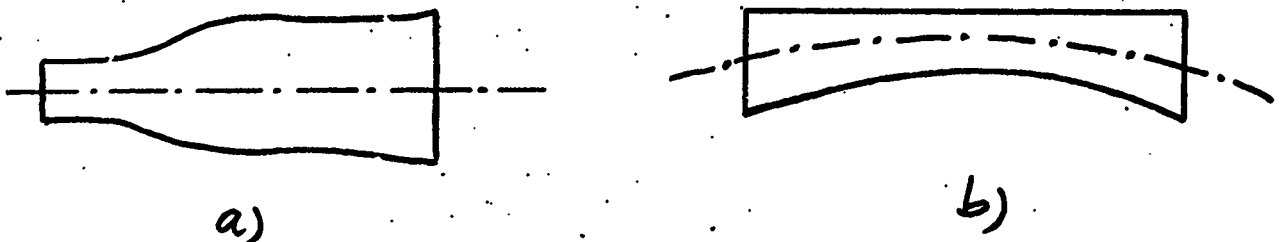


Fig. 4.12

4.2. ESTUDIO DE LA PLACA EN EXTENSION: EFECTO LAJA

4.2.1. Definición de esfuerzos y acciones externas

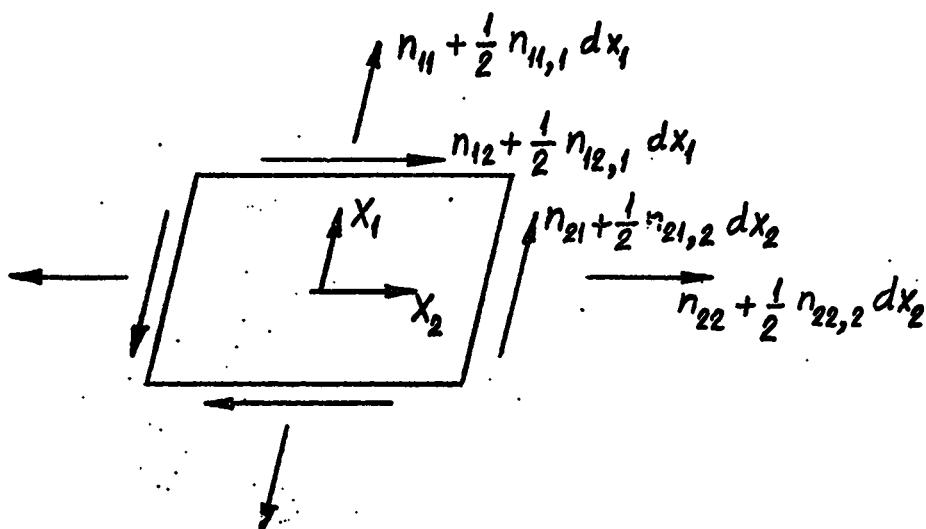


Fig. 4.13

Se define el esfuerzo n_{ij} como aquél que actúa en la cara i y produce tensiones en la dirección j . Son positivos cuando, actuando en la cara frontal, tienen el sentido de x_i positiva (figura 4.13). Estos esfuerzos se definen por unidad de longitud. Las acciones externas X_1 y X_2 se definen por unidad de superficie.

Dentro de los esfuerzos representados en la figura anterior, no han sido tenidos en cuenta los momentos torsores (figura 4.14-a), pues el análisis se efectúa a nivel

diferencial, no admitiéndose la situación indicada en la fi
gura 4.14-b, sino la de la figura 4.14-c.

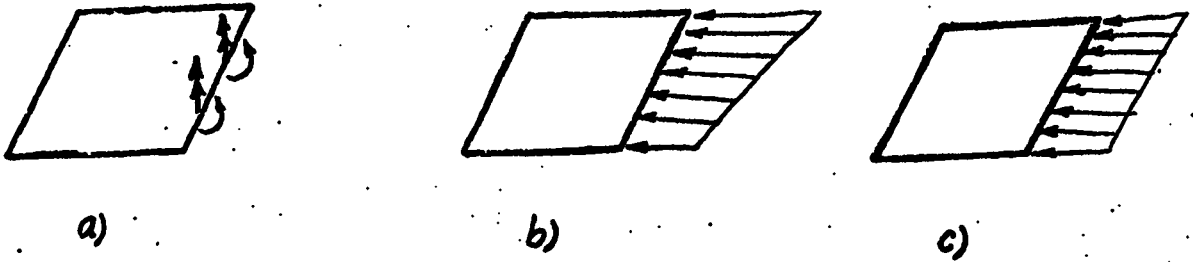


Fig. 4.14

4.2.2. Ecuación diferencial de la laja

1) Ecuaciones de equilibrio

Planteando el equilibrio de fuerzas en la dirección x_1 , se deduce:

$$n_{11,1} dx_1 dx_2 + n_{21,2} dx_2 dx_1 + X_1 dx_1 dx_2 = 0$$

es decir:

$$n_{11,1} + n_{21,2} + X_1 = 0 \quad (4.26-a)$$

Análogamente:

$$n_{12,1} + n_{22,2} + X_2 = 0 \quad (4.26-b)$$

0, en forma abreviada:

$$n_{ij,i} + x_j = 0 \quad (4.26-c)$$

$$\left. \begin{array}{l} i = 1, 2 \\ j = 1, 2 \end{array} \right\} \text{Sumatorio en } i$$

Si se toman momentos respecto a una vertical, se deduce:

$$n_{12} = n_{21} \quad (4.27)$$

2) Definición de los esfuerzos en función de las tensiones

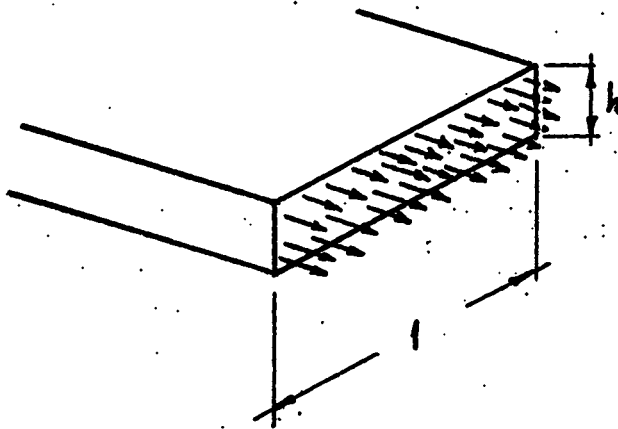


Fig. 4.15

De la figura 4.15, se deduce:

$$n_{ij} = \sigma_{ij} \cdot h \cdot l = \sigma_{ij} \cdot h \quad (4.28)$$

3) Relaciones tensión-deformación

$$\epsilon_{11} = \frac{1}{E} \{ \sigma_{11} - \nu \sigma_{22} \}$$

$$\epsilon_{22} = \frac{1}{E} \{ \sigma_{22} - \nu \sigma_{11} \} \quad (4.29)$$

$$\epsilon_{12} = \frac{2(1+\nu)}{E} \sigma_{12}$$

4) Relaciones deformaciones-desplazamientos

$$\epsilon_{11} = u_{1,1}$$

$$\epsilon_{22} = u_{2,2} \quad (4.30-a)$$

$$\epsilon_{12} = \frac{1}{2} (u_{1,2} + u_{2,1})$$

o bien:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (4.30-b)$$

Se observa que ϵ_{ij} es independiente del nivel

z.

Derivando adecuadamente en (4.30-a) y eliminando

u_1 , se deduce la siguiente ecuación de compatibilidad:

$$\epsilon_{11,22} + \epsilon_{22,11} - 2\epsilon_{12,21} = 0 \quad (4.31)$$

5) Ecuación diferencial

En lo que sigue, se va a utilizar un método de compatibilidad (en fuerzas) y no de equilibrio (en desplazamientos).

De las ecuaciones (4.28) y (4.29), se deduce:

$$\epsilon_{11} = \frac{1}{Eh} (n_{11} - \nu n_{22})$$

$$\epsilon_{22} = \frac{1}{Eh} (n_{22} - \nu n_{11}) \quad (4.32)$$

$$\epsilon_{12} = \frac{2(1+\nu)}{Eh} n_{12}$$

Derivando adecuadamente y sustituyendo en (4.31), queda:

$$\frac{1}{Eh} \{n_{11,22} - \nu n_{22,22} + n_{22,11} - \nu n_{11,11} - 2(1+\nu)n_{12,12}\} = 0$$

es decir:

$$\{n_{11,22} + n_{22,11} - 2n_{12,12}\} - \nu\{n_{22,22} + n_{11,11} + 2n_{12,12}\} = 0 \quad (4.33)$$

Al ser $n_{12} = n_{21}$, teóricamente, entre (4.26-a), (4.26-b) y (4.33), se puede resolver el problema. Sin embargo el método a seguir consiste en introducir la función de tensión de Airy, como se indica:

$$\begin{aligned} n_{11} &= \phi_{,22} - \int X_1 dx_1 \\ n_{22} &= \phi_{,11} - \int X_2 dx_2 \\ n_{12} &= -\phi_{,12} \end{aligned} \quad (4.34)$$

Las relaciones anteriores satisfacen idénticamente a las ecuaciones (4.26-a) y (4.26-b). Por lo tanto, sustituyéndolas en (4.33), se llega a una ecuación diferencial en ϕ .

Por comodidad para el desarrollo teórico, se supone que no existen tensiones en el interior de la laja sino tan sólo en el borde. Ello implica $X_1 = X_2 = 0$.

En ese caso, se verifica:

$$\begin{aligned} n_{11} &= \phi_{,22} \\ n_{22} &= \phi_{,11} \\ n_{12} &= -\phi_{,12} \end{aligned} \quad (4.35)$$

Entrando en (4.33):

$$\phi',_{2222} + \phi',_{1111} + 2\phi',_{1212} - \nu(\phi',_{1122} + \phi',_{2211} - 2\phi',_{1212}) = 0$$

es decir:

$$\phi',_{1111} + 2\phi',_{1212} + \phi',_{2222} = 0 \quad (4.36)$$

o bien:

$$\nabla^4 \phi = 0 \quad (4.37)$$

La anterior ecuación diferencial se completa con las condiciones de contorno pertinentes. Es preciso señalar que dichas condiciones de contorno han de ser preferentemente de tipo estático, pues, caso de que sean cinemáticas complican el problema.

4.2.3. Analogía entre extensión y flexión

Entre la flexión y la extensión de la placa se puede establecer una analogía estático-cinemática (Goldenweizer), tal como se indica en los cuadros adjuntos:

PROBLEMA HOMOGENEO			
	ESTATICO	CINEMATICO	
EXTENSION	$n_{11,1} + n_{12,2} = 0$ $n_{21,1} + n_{22,2} = 0$	$K_{22,1} - K_{12,2} = 0$ $-K_{21,1} + K_{11,2} = 0$	FLEXION
FLEXION	$m_{11,11} + 2m_{12,12} +$ $+ m_{22,22} = 0$	$\epsilon_{22,11} - 2\epsilon_{12,12} +$ $+ \epsilon_{11,22} = 0$	EXTENSION

PAREJA	
$\phi_{,22} = n_{11}$ $-\phi_{,12} = n_{12}$ $\phi_{,11} = n_{22}$	$K_{22} = w_{,22}$ $-K_{12} = -w_{,12}$ $K_{11} = w_{,11}$
$f_{2,2} = m_{11}$ $\frac{1}{2}(f_{1,2} + f_{2,1}) = m_{12}$ $f_{1,1} = m_{22}$	$\epsilon_{22} = u_{2,2}$ $-\epsilon_{12} = -\frac{1}{2}(u_{1,2} + u_{2,1})$ $\epsilon_{11} = u_{1,1}$
f_1 f_2 ϕ	u_1 u_2 w

4.3. PLANTEAMIENTO DE PLACAS CON EXTENSION CONOCIDA

4.3.1. Introducción e hipótesis

El citado planteamiento se hace a partir de los problemas homogéneos planteados en los apartados 4.1 y 4.2.

Se considera que existe linealidad de material y linealidad geométrica, pero no linealidad de desplazamientos. Por lo tanto, en las ecuaciones de equilibrio^(*), se tiene en cuenta la geometría deformada, al igual que en la viga-columna.

4.3.2. Desarrollo del problema

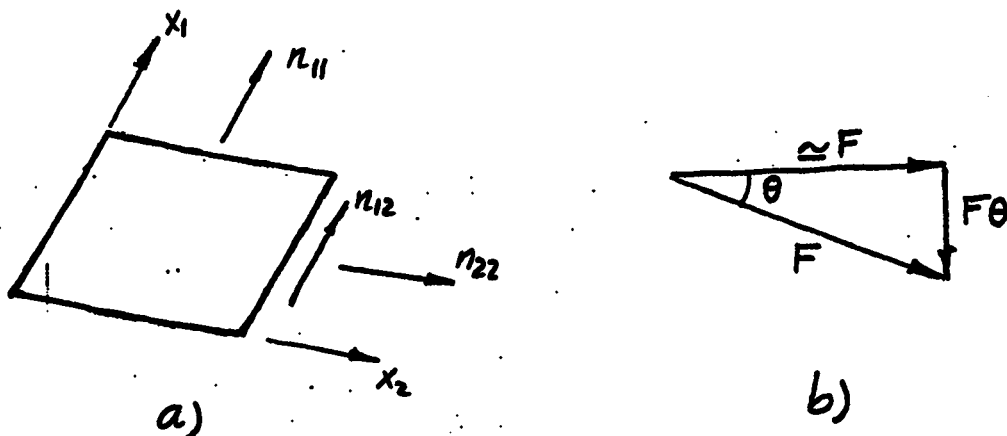


Fig. 4.16

(*) Nota: En realidad aquí sólo en las ecuaciones de equilibrio de la flexión (placa) se considera la geometría de la estructura deformada.

Al considerar la linealidad de la geometría, dada una fuerza F (equivalente a un cierto esfuerzo n_{ij} por unidad de longitud -figura 4.16-a-) inclinada un cierto ángulo θ (figura 4.16-b), se verifica que la componente horizontal vale $F(1-\theta^2) \simeq F$, y la componente vertical $F\theta$.

Por lo tanto, si se estudia una placa a flexión - con unas n_{ij} conocidas (figura 4.17-a), es preciso tener en cuenta que los esfuerzos cortantes (figura 4.17-b) sufrirán un cierto incremento debido a la componente $F\theta$ citada (figura 4.17-c).

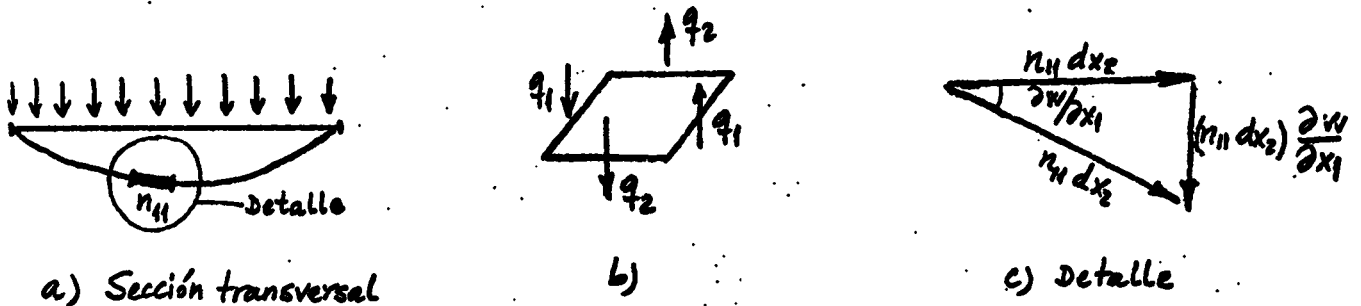


Fig. 4.17

Recordando que se verifica: $q_{1,1} + q_{2,2} + z^* = 0$, según la figura 4.17-c se deduce un incremento de carga vertical (cortante) que es:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} (n_{11} \frac{\partial w}{\partial x_1}) dx_1 dx_2 = \{n_{11,1} w_{,1} + n_{11} w_{,11}\} dx_1 dx_2 \quad (4.38-a)$$

Análogamente, debido a n_{22} existe otro incremento:

$$\frac{\partial}{\partial x_2} \{n_{22} \frac{\partial w}{\partial x_2}\} dx_1 dx_2 = \{n_{22,2} w_{,2} + n_{22} w_{,22}\} dx_1 dx_2 \quad (4.38-b)$$

Y debido a las n_{12} y n_{21} ;

$$\{n_{12,1} w_{,2} + n_{12} w_{,12}\} dx_1 dx_2 \quad (4.38-c)$$

$$\{n_{21,2} w_{,1} + n_{21} w_{,12}\} dx_1 dx_2 \quad (4.38-d)$$

Teniendo en cuenta (4.26) y (4.27), es decir, en este caso:

$$n_{12} = n_{21}; n_{11,1} + n_{12,2} = 0 \quad \text{y} \quad n_{22,2} + n_{21,1} = 0$$

es preciso tener en cuenta una Z^* adicional, definida por la suma de los incrementos (4.38), esto es:

$$Z^* \text{ adicional} = n_{11} w_{,11} + n_{22} w_{,22} + 2n_{12} w_{,12} = L(w) \quad (4.39)$$

Por lo tanto, la ecuación diferencial modificada es ;

$$DV^4 W = Z^* + L(w) \quad (4.40)$$

Recordando las expresiones (4.35), se cumple finalmente:

$$\begin{cases} DV^4 w - L(w, \phi) = z^* \\ V^4 \phi = 0 \\ \text{c.c. en flexión y extensión} \end{cases} \quad (4.41)$$

siendo:

$$L(w, \phi) = \phi'_{,22} w'_{,11} - 2\phi'_{,12} w'_{,12} + \phi'_{,11} w'_{,22} \quad (4.42)$$

Es preciso señalar que en el problema definido por (4.41) no puede ser aplicado el principio de superposición, salvo que se conserven las compresiones, es decir $\phi = \text{cte.}$ (Analogía con la viga-columna).

4.3.3. Cargas dinámicas y fundación elástica

- Cargas dinámicas:

$$DV^4 w - L(w, \phi) + \rho h \ddot{w} = z^* \quad (4.43)$$

- Terreno Winkler y cargas dinámicas

$$DV^4 w - L(w, \phi) + \rho h \ddot{w} + Kw = z^* \quad (4.44)$$

4.4. METODOS DIRECTOS DE RESOLUCION

4.4.1. Método de NAVIER para el cálculo de placas

El método de Navier es del año 1820 y sólo es válido para placas simplemente apoyadas en los cuatro bordes.

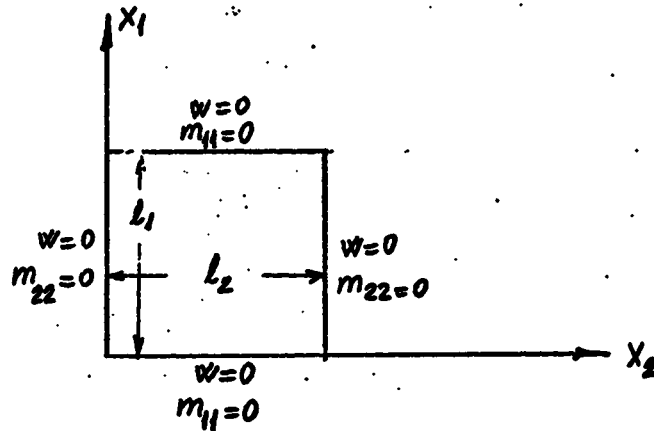


Fig. 4.18

En la placa de la figura 4.18, se cumple, por ejemplo, en el borde $x_1 = 0$, la condición siguiente

$$w = w(x_2) = 0 \rightarrow w_{,2} = 0 \rightarrow w_{,22} = 0 \quad (4.45)$$

Las ecuaciones (4.45) se verifican si el borde es recto. En ese caso, en el mismo borde $x_1=0$, se tiene:

$$m_{11}=0 \rightarrow -D(w_{,11} + \nu w_{,22}) = 0 \rightarrow w_{,11} = 0 \quad (4.46)$$

Por lo tanto, las condiciones de simple apoyo en ese borde vienen dadas por $w=0$ y $w_{,11}=0$, lo cual es válido solamente en el caso de borde recto.

Sea resolver el problema $DV^4 w = Z$.

El método de Navier supone una solución para w - que satisface automáticamente las condiciones de contorno:

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn} \operatorname{sen} \frac{n\pi x_1}{l_1} \operatorname{sen} \frac{m\pi x_2}{l_2} \quad (4.47)$$

w_{mn} puede ser cualquier número, pero se eligen de forma que la expresión (4.47) satisfaga la ecuación diferencial.

La carga Z se desarrolla en serie de Fourier como sigue:

$$Z(x_1, x_2) = \sum Z_{mn} \operatorname{sen} \frac{n\pi x_1}{l_1} \operatorname{sen} \frac{m\pi x_2}{l_2} \quad (4.48)$$

Siendo:

$$Z_{mn} = \frac{\int_0^{l_1} \int_0^{l_2} Z(x_1, x_2) \operatorname{sen} \frac{n\pi x_1}{l_1} \operatorname{sen} \frac{m\pi x_2}{l_2} dx_1 dx_2}{\int_0^{l_1} \int_0^{l_2} \operatorname{sen}^2 \frac{n\pi x_1}{l_1} \operatorname{sen}^2 \frac{m\pi x_2}{l_2} dx_1 dx_2} \quad (4.49)$$

El denominador de la fórmula anterior equivale a

$$\frac{l_1 l_2}{4}.$$

Entrando en $D \nabla^4 w = z$ con las expresiones (4.47) y (4.48) y llamando $\alpha_n = \frac{n\pi}{l_1}$ y $\beta_m = \frac{m\pi}{l_2}$, resulta, prescindiendo ya del sumatorio:

$$D w_{mn} (\alpha_n^4 + 2\alpha_n^2 \beta_m^2 + \beta_m^4) \operatorname{sen} \frac{n\pi x_1}{l_1} \operatorname{sen} \frac{m\pi x_2}{l_2} = z_{mn} \operatorname{sen} \frac{n\pi x_1}{l_1} \operatorname{sen} \frac{m\pi x_2}{l_2}$$

es decir:

$$w_{mn} = \frac{z_{mn}/D}{(\alpha_n^2 + \beta_m^2)^2} \quad (4.50)$$

Su hay un terreno elástico con módulo de balasto

K ;

$$w_{mn} = \frac{z_{mn}}{D \{ (\alpha_n^2 + \beta_m^2)^2 + \frac{K}{D} \}} \quad (4.51)$$

4.4.2. Método de NAVIER en el caso de que existan compresiones conocidas:

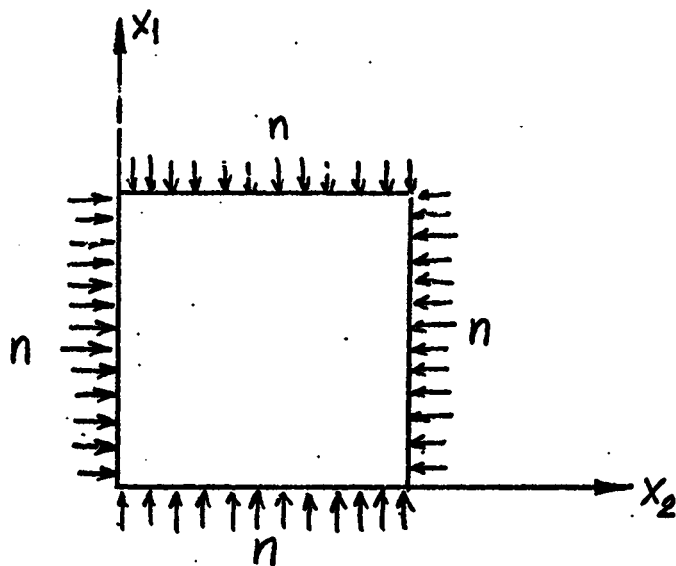


Fig. 4.19

Por comodidad de desarrollo, se supone el estado de equicompresión de la figura 4.19, es decir:

$$n_{11} = n_{22} = -n ; \quad n_{21} = n_{12} = 0 \quad (4.52)$$

siendo n un valor conocido.

La ecuación diferencial a resolver es:

$$D(w,_{1111} + 2w,_{1122} + w,_{2222}) + L(w, \phi) = Z \quad (4.53)$$

Y las condiciones de contorno son las de simple apoyo.

En este caso, no es preciso resolver $\nabla^4 \phi = 0$, si no que ya directamente es:

$$D(w_{,1111} + 2w_{,1122} + w_{,2222}) - n(w_{,11} + w_{,22}) = z \quad (4.54)$$

Resolviendo para un término genérico:

$$\{D(\alpha_n^4 + 2\alpha_n^2 \beta_m^2 + \beta_m^4) - n(\alpha_n^2 + \beta_m^2)\} w_{mn} = z_{mn}$$

es decir:

$$w_{mn} = \frac{z_{mn}/D}{\{(\alpha_n^2 + \beta_m^2) - \frac{n}{D}\}(\alpha_n^2 + \beta_m^2)} \quad (4.55)$$

En la fórmula anterior se observa la lógica amplificación de w_{mn} , debida a la compresión n .

Por otra parte también se deduce:

$$n_{\text{crítica}} = D(\alpha_n^2 + \beta_m^2) \quad (4.56)$$

4.4.3. Método de NAVIER para el caso de considerar pandeo y fuerzas dinámicas

Mediante este método es posible la obtención de

la $n_{crítica}$ a través de un estudio dinámico.

La ecuación diferencial es:

$$D \nabla^4 w - n(w_{,11} + w_{,22}) + \rho h \ddot{w} = Z(x_1, x_2, t) \quad (4.57)$$

Se resuelve el problema en vibraciones libres, es decir, cuando $Z(x_1, x_2, t) = 0$, y se supone:

$$w(x_1, x_2, t) = \bar{w}(x_1, x_2) T(t) \quad (4.58)$$

Con estos dos supuestos, se entra en (4.57), resultando:

$$D \nabla^4 \bar{w} - n(\bar{w}_{,11} + \bar{w}_{,22}) T + \rho h \bar{w} \ddot{T} = 0 \quad (4.59)$$

Resolviendo por el método de separación de variables, se tiene:

$$\frac{\ddot{T}}{T} = - \frac{D \nabla^4 \bar{w} - n(\bar{w}_{,11} + \bar{w}_{,22})}{\rho h \bar{w}} = -\omega^2 \quad (4.60)$$

ω^2 es una constante, de valor:

$$\omega^2 = \frac{D(\alpha_n^2 + \beta_m^2)^2 - n(\alpha_n^2 + \beta_m^2)}{\rho h w_{mn}} w_{mn} \quad (4.61)$$

En este caso, queda pues:

$$T = A \sin(\omega t + \psi) \text{ cuando } \omega > 0$$

$$T \rightarrow \infty \text{ cuando } \omega < 0 \text{ y } t \rightarrow \infty$$

Existe un $\omega_{\text{crítica}}$, cuando $n = n_{\text{crítica}} = D(\alpha_n^2 + \beta_m^2)$.

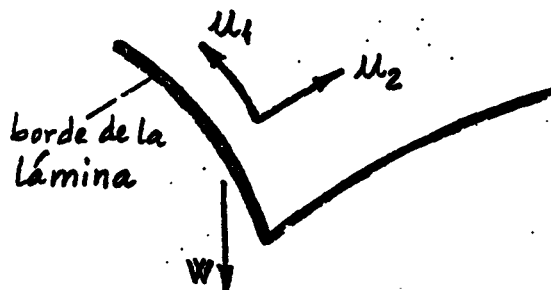
En el caso de que $D(\alpha_n^2 + \beta_m^2) > n_{\text{crit.}}$ se produce inestabilidad.

NOTA IMPORTANTE:

La aplicación del método de NAVIER no es válida, incluso para condiciones de simple apoyo, si en (4.52) se verifica que $n_{12} \neq 0$, ya que entonces, en la expresión (4.60) aparecería el término \bar{w}_{12} , con términos en coseno. Es decir, no se repetiría el seno.

Las ideas anteriores tienen gran importancia en su aplicación al cálculo de láminas con condiciones tímpa-

no:



$$w = 0 = m_{22}$$

$$n_{22} = 0 = u_1$$

Figura 4.20. Condiciones tímpa

En ese caso se aplican al estudio de láminas como la representada en la figura 4.21-a, y, como normalmente el ángulo $\psi \approx 0$, pues suelen estar muy rebajadas, también se aplican al caso representado en la figura 4.21-b.

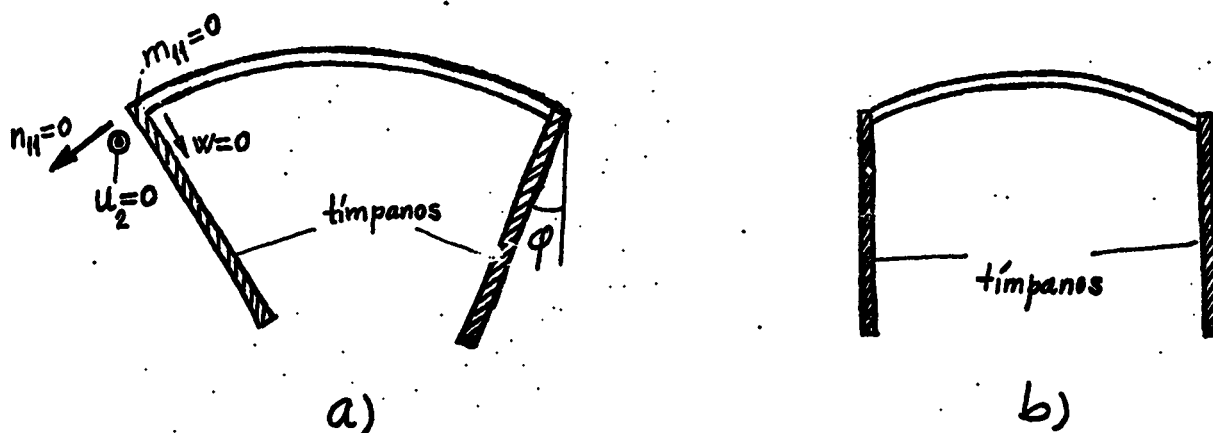


Fig. 4.21

4.4.4. Solución de NAVIER generalizada: Funciones de Rayleigh

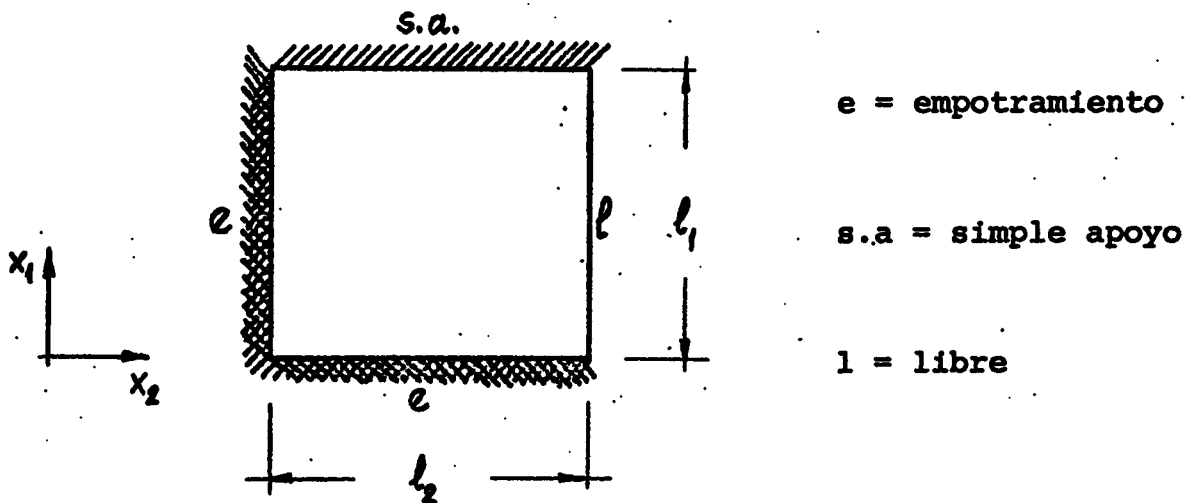
Este método puede ser aplicado cuando no existe torsión o ésta es muy pequeña, de modo que se puede despreciar. En la práctica esto ocurre en el caso de puentes de vigas. Sin embargo, si la sección transversal es alveolar, o el puente es losa, es adecuado seguir este método.

El método aproximado consiste en resolver la ecua

ción diferencial siguiente:

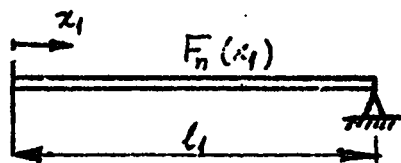
$$\nabla^4 w = \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial x_2^4} = \frac{z}{D} \quad (4.62)$$

en cuyo caso, las condiciones de contorno no son tan restrictivas (simple apoyo) sino que el método es aplicable a problemas más complejos (figura 4.22).



Para el ejemplo de la figura anterior, la idea consiste en desarrollar independientemente en las dos direcciones x_1 y x_2 , utilizando funciones de Rayleigh:

- En la dirección x_1 :



$$\frac{d^4 F_n(x_1)}{dx_1^4} = \lambda_n^4 F_n(x_1) \quad (4.63)$$

$$\text{c.c.} \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1 = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} w = 0 \rightarrow F_n(0) = 0 \\ w' = 0 \rightarrow F'_n(0) = 0 \end{array} \right. \\ x_1 = l_1 \quad \left\{ \begin{array}{l} w = 0 \rightarrow F_n(l_1) = 0 \\ w'' = 0 \rightarrow F''_n(l_1) = 0 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Resolviendo (4.63):

$$r^4 - \lambda_n^4 = 0 \quad ; \quad \left\{ \begin{array}{l} r = \pm \lambda_n \\ r = \pm i\lambda_n \end{array} \right.$$

Por lo tanto:

$$F_n(x_1) = C_1 \operatorname{sen} \lambda_n x_1 + C_2 \cos \lambda_n x_1 + C_3 \operatorname{Sh} \lambda_n x_1 + C_4 \operatorname{Ch} \lambda_n x_1 \quad (4.64)$$

Imponiendo las c.c.:

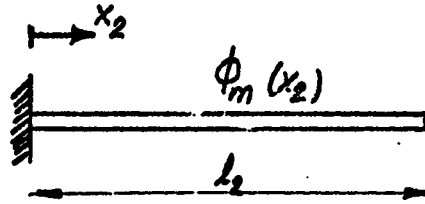
$$\begin{array}{cccccc}
 C_1 \cdot 0 & + C_2 \cdot 1 & + C_3 \cdot 0 & + C_4 \cdot 1 & = 0 & \\
 C_1 \cdot \lambda_n & + C_2 \cdot 0 & + C_3 \cdot \lambda_n & + C_4 \cdot 0 & = 0 & \\
 C_1 \cdot S & + C_2 \cdot C & + C_3 \cdot S & + C_4 \cdot C & = 0 & \\
 C_1 \cdot (-\lambda_n^2 S) & + C_2 \cdot (-\lambda_n^2 C) & + C_3 \cdot \lambda_n^2 S & + C_4 \cdot \lambda_n^2 C & = 0 &
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \left[\begin{array}{cccc}
 0 & 1 & 0 & 1 \\
 \lambda_n & 0 & \lambda_n & 0 \\
 S & C & S & C \\
 -\lambda_n^2 S & -\lambda_n^2 C & \lambda_n^2 S & \lambda_n^2 C
 \end{array} \right]
 \begin{array}{c}
 \left[\begin{array}{c}
 C_1 \\
 C_2 \\
 C_3 \\
 C_4
 \end{array} \right] =
 \end{array}$$

$$= 0 \quad \left\{ \begin{array}{l}
 s = \text{sen} \lambda_n l_1 \\
 c = \text{cos} \lambda_n l_1 \\
 S = \text{Sh} \lambda_n l_1 \\
 C = \text{Ch} \lambda_n l_1
 \end{array} \right.$$

Para que el sistema anterior tenga solución distinta de la trivial, el determinante de los coeficientes ha de ser igual a cero. Esta condición conduce a una ecuación trascendente en λ_n , existiendo como solución infinitos valores de λ_n , a cada uno de los cuales le corresponde una cierta F_n :

$$\begin{array}{ccccccc}
 \lambda_1 & \lambda_2 & \dots\dots\dots & \lambda_n \\
 \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\
 F_1 & F_2 & \dots\dots\dots & F_n
 \end{array}$$

- En la dirección x_2 :



$$\frac{d^4 \phi_m(x_2)}{dx_2^4} = \mu_m^4 \phi_m(x_2) \quad (4.65)$$

$$\text{c.c.} \quad \left\{ \begin{array}{l} x_2 = 0 \\ x_2 = l_2 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} w = 0 \rightarrow \phi_m(0) = 0 \\ w' = 0 \rightarrow \phi_m'(0) = 0 \\ w'' = 0 \rightarrow \phi_m''(l_2) = 0 \\ w''' = 0 \rightarrow \phi_m'''(l_2) = 0 \end{array} \right.$$

Análogamente se obtienen infinitos μ_m y, por lo tanto, ϕ_m :

$$\begin{array}{ccc} \mu_1 & \mu_2 & \dots \dots \mu_m \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \phi_1 & \phi_2 & \phi_m \end{array}$$

Y, además:

(4.66).

$$\phi_m(x_2) = D_1 \operatorname{sen} \mu_m x_2 + D_2 \operatorname{cos} \mu_m x_2 + D_3 \operatorname{Sh} \mu_m x_2 + D_4 \operatorname{Ch} \mu_m x_2$$

La solución de la flecha es:

$$w(x_1, x_2) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} w_{mn} F_n(x_1) \phi_m(x_2) \quad (4.67)$$

Y la ley de cargas es:

$$Z(x_1, x_2) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} z_{mn} F_n(x_1) \phi_m(x_2) \quad (4.68)$$

siendo:

$$z_{mn} = \frac{\int_0^1 \int_0^1 Z(x_1, x_2) F_n(x_1) \phi_m(x_2) dx_1 dx_2}{\int_0^1 F_n(x_1) dx_1 \int_0^1 \phi_m(x_2) dx_2} \quad (4.69)$$

Entrando con las expresiones (4.67) y (4.68) en la ecuación diferencial (4.62) y precindiendo del sumatorio, se cuple:

$$\lambda_n^4 F_n \phi_m w_{mn} + \mu_m^4 F_n \phi_m w_{mn} = \frac{z_{mn}}{D} F_n \phi_m$$

es decir

$$w_{mn} = \frac{z_{mn}/D}{\lambda_n^4 + \mu_m^4} \quad (4.70)$$

4.4.5. Solución de MAURICE-LEVY

La solución de Levy data del año 1890, y fue puesta en práctica posteriormente por Nadai en 1910.

Flügge, Dissinger y Finsterwalder la aplicaron al cilindro en 1930.

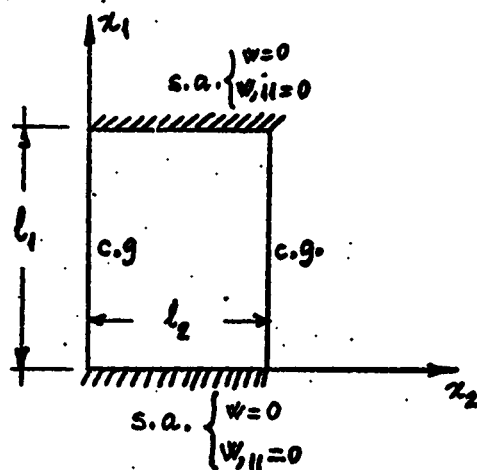
Schörer, en 1935, la usó con simplificaciones ($m_{12}=0$; $n_{12}=0$), utilizando funciones de Rayleigh (solución de generalizada de Levy).

Jenkins, siguiendo la misma técnica, resolvió en 1940, láminas cilíndricas en cadena, utilizando cálculo tensorial.

Bouma la aplicó, en 1959, a láminas de doble curvatura.

Finalmente, Samartín en 1968, aplicó la misma idea de Bouma a un problema láminas de traslación bajo acciones dinámicas.

Sea la placa de la figura 4.23:



s.a. = simple apoyo (2 cond)

c.g. = condiciones generales (2 cond.)

Fig. 4.23

La ecuación diferencial a resolver es:

$$D\nabla^4 w(x_1, x_2) = Z(x_1, x_2) \quad (4.71)$$

con las condiciones de contorno especificadas en la figura 4.23.

Se desarrolla la ley de flechas w en serie de Fourier en un solo sentido, ignorándose, en principio, como sería en el otro sentido:

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} w_n(x_2) \operatorname{sen} \lambda_n x_1 \quad (4.72)$$

siendo:

$$\lambda_n = \frac{n\pi}{l_1} \quad (4.73)$$

La ley de cargas, también desarrollada en serie, es:

$$Z(x_1, x_2) = \sum_{n=1}^{\infty} z_n(x_2) \operatorname{sen} \lambda_n x_1 \quad (4.74)$$

Obviamente, cuando la ley de cargas es separable, basta con desarrollar z_1 solamente:

$$Z(x_1, x_2) = Z_1(x_1) \cdot Z_2(x_2) \quad (4.75)$$

En el caso general, se verifica:

$$Z_n(x_2) = \frac{\int_0^{l_1} Z(x_1, x_2) \sin \frac{n\pi x_1}{l_1} dx_1}{\underbrace{\int_0^{l_1} \sin^2 \frac{n\pi x_1}{l_1} dx_1}_{l_1/2}} \quad (4.76)$$

El cálculo anterior no suele ser necesario, cuando se cumple (4.75).

Entrando con las expresiones (4.72) y (4.74) en la ecuación diferencial (4.71), y precindiendo del sumatorio, se tiene:

$$\begin{aligned} D\{\lambda_n^4 w_n(x_2) - 2\lambda_n^2 w_n''(x_2) + w_n^{IV}(x_2)\} \sin \frac{n\pi x_1}{l_1} \\ = Z_n(x_2) \sin \frac{n\pi x_1}{l_1} \end{aligned} \quad (4.77)$$

En (4.77) se observa que se ha reducido el orden de dimensionalidad del problema, ya que de un problema 2-D se ha pasado a n problemas 1-D.

La ecuación diferencial (4.77) es de coeficientes

constantes.

La ecuación característica de la homogénea es:

$$r^4 - 2\lambda_n^2 r^2 + \lambda_n^4 = 0 ; \quad \begin{cases} r = \lambda_n & (\text{doble}) \\ r = -\lambda_n & (\text{doble}) \end{cases}$$

Y la solución es:

$$w_n(x_2) = e^{\lambda_n x_2} (A_1 x_2 + A_2) + e^{-\lambda_n x_2} (A_3 x_2 + A_4) + w_0(x_2) \quad (4.78)$$

Siendo $w_0(x_2)$ una solución particular.

Supuesto que las condiciones generales (c.g. figura 4.23) sean las de simple apoyo en $x_2=0$ y empotramiento - en $x_2=l_2$, las constantes A_i ($i=1,2,3,4$) se obtienen imponiendo:

$$x=0 : w=0 ; w_{,22}=0$$

$$x=l_2 : w=0 ; w_{,2}=0$$

Normalmente no se opera así, sino con x_2 y (l_2-x_2) (ver figura 4.23), para aprovechar las simetrías.

Es de señalar que el método de Levy converge mucho más rápidamente que el de Navier, de tal forma que incluso para condiciones de simple apoyo en los cuatro bordes se suele aplicar el método de Levy en lugar de Navier.

Incluso para problemas como el representado en la figura 4.24. es posible la utilización del método de Levy, introduciendo fuerzas puntuales en los puntos señalados con una cruz y compatibilizando las flechas:

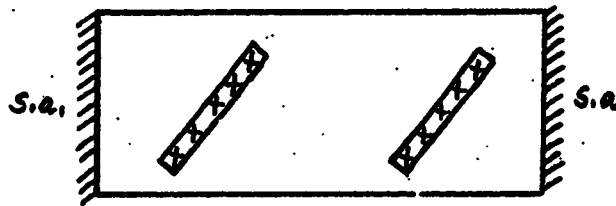


Fig. 4.24

4.5. METODOS INDIRECTOS DE RESOLUCION

4.5.1. Introducción

La réplica a los métodos directos ya vistos la constituyen los métodos indirectos de Galerkin y Kantarovich, de tal modo que se puede establecer la equivalencia que sigue:

METODOS DE RESOLUCION	
DIRECTOS	INDIRECTOS
Navier	Galerkin
Levy	Kantarovich

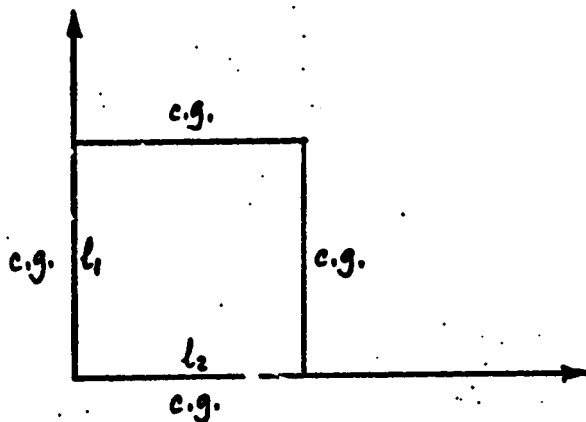
NOTA: Es interesante el libro de Kantarovich y Krilov.

4.5.1. Método de Galerkin

Sea la ecuación diferencial:

$$DV^4 w = Z \quad (4.79)$$

correspondiente al problema indicado en la figura 4.25:



c.g. = condiciones generales

Fig. 4.25

Se considera una ley de flechas del tipo:

$$w^{(N)}(x_1, x_2) = \sum_{m=1}^N a_m F_m(x_1, x_2) \quad (4.80)$$

Siendo $F_m(x_1, x_2)$ ($m=1, \dots, N$) un conjunto completo y linealmente independiente de funciones que satisfacen las condiciones de contorno.

Dichas funciones se descomponen como sigue:

$$F_m(x_1, x_2) = X_m(x_1) \cdot Y_m(x_2) \quad (4.81)$$

en donde $Y_m(x_2)$ son funciones que se definen a priori y $X_m(x_1)$ pueden ser del tipo: (por ejemplo, para el caso - biempotrado):

$$X_1(x_1) = x_1^2 (x_1 + C_1^1)(1-x_1)^2 \quad (4.82)$$

$$X_2(x) = x_1^2 (x_1^2 + C_1^2 x_1 + C_2^2)(1-x_1)^2$$

A partir de (4.80), (4.81) y (4.82) se entra en la ecuación diferencial (4.79), definiéndose una función - error como sigue:

$$\varepsilon = (\nabla^4 w^{(N)} - \frac{Z}{D}) \quad (4.83)$$

imponiéndose, a continuación, las condiciones:

$$\int_0^1 \int_0^1 \varepsilon \cdot F_m(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = 0 \quad (4.84)$$

$$\forall m = 1, 2, \dots, N$$

que permiten la obtención de las constantes C_i^m .

4.5.2. Método de Kantarovich

Se supone la ley de flechas siguiente:

$$w(x_1, x_2) = \sum_{n=1}^N \psi_n(x_1) w_n(x_2) \quad (4.85)$$

Siendo $\psi_n(x_1)$ funciones conocidas a priori, que -
deben satisfacer las condiciones de contorno y $w_n(x_2)$ funcio-
nes desconocidas.

Generalmente es suficiente, para conseguir una -
aproximación aceptable, el considerar $N=1$. En ese caso:

$$x(x_1, x_2) = \psi_1(x_1) w_1(x_2) \quad (4.86)$$

Entrando con (4.86) en (4.79) se obtiene la función
error siguiente:

$$\epsilon = D(\psi_1^{IV} w_1 + 2\psi_1'' w_1'' + \psi_1 w_1^{IV}) - Z \quad (4.87)$$

Y la condición a imponer es:

$$\int_0^1 \epsilon \cdot \psi_1 dx = 0 \quad (4.88)$$

Una posible utilización mixta de los métodos de Galerkin y Kantarovich, apropiada para el cálculo manual es la que sigue:

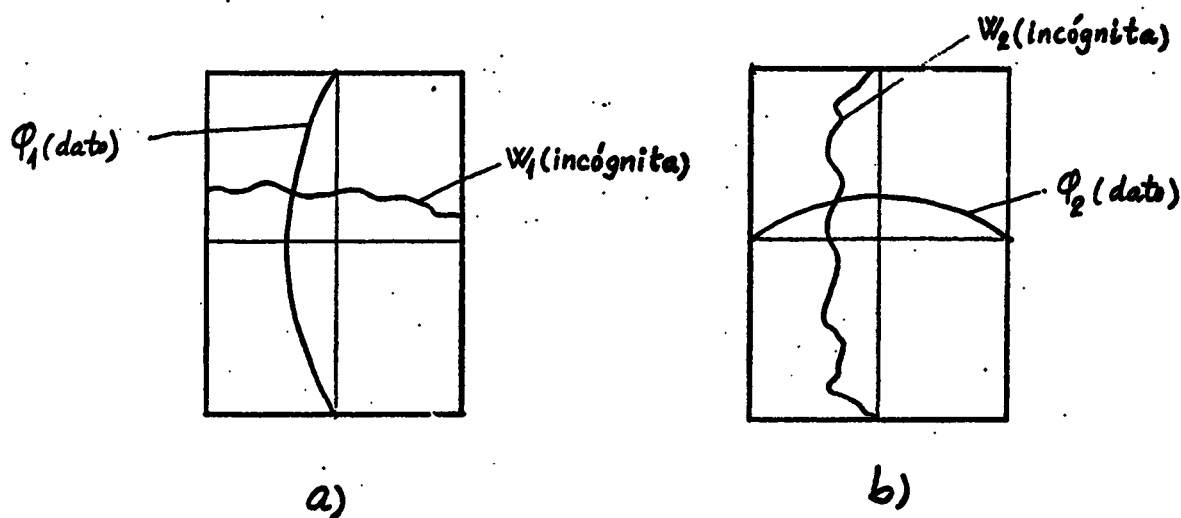


Fig. 4.26

Se aplica Kantarovich, según se indica en las figuras 4.26-a y b, y posteriormente se aplica Galerkin, escogiendo como funciones una combinación de los resultados de a) y b), es decir:

$$C_1 \times (a) + C_2 \times (b)$$

5. LAMINA PLEGADA

5.1. INTRODUCCION

Una estructura típica de lámina plegada se representa en la figura 5.1., en donde se observa la distinción entre la lámina plegada cuyos elementos son todos losas (a) y la lámina plegada con elementos vigas y losas conjuntamente (b).

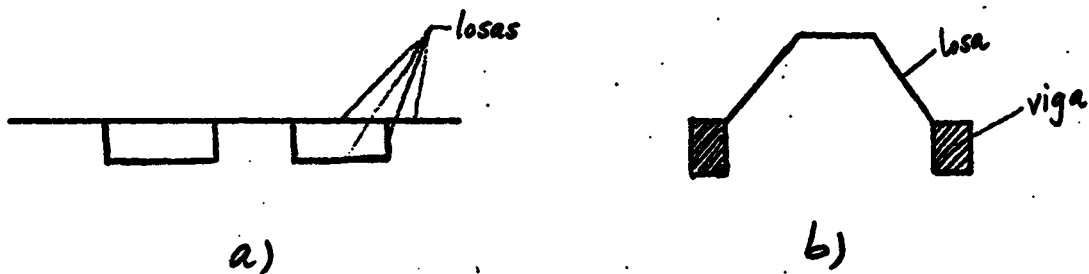
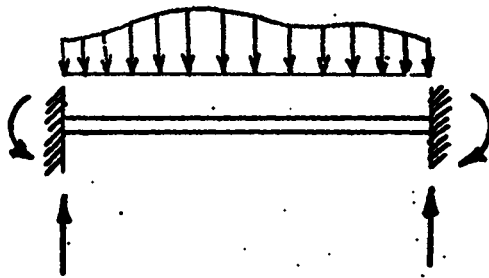


Fig. 5.1

En el método de análisis que se va a desarrollar, se sigue la solución de Levy, lo cual implica que las condiciones de apoyo son tipo tímpano.

Las losas se suponen isótropas y se estudian como placas y como lajas, suponiendo que las cargas actúan en las

aristas. Caso de que las, cargas no actúen en las aristas, la técnica de cálculo es la típica de cálculo matricial de estructuras, mediante descomposición en solución inicial y moda. Las fuerzas de empotramiento rígido pertinentes son el momento flector y la reacción de Kirchhoff, tal como se indica en la figura 5.2.



m = momento

r = reacción de Kirchhoff

Fig. 5.2

5.2. ANALISIS COMO PLACA: MATRIZ DE RIGIDEZ

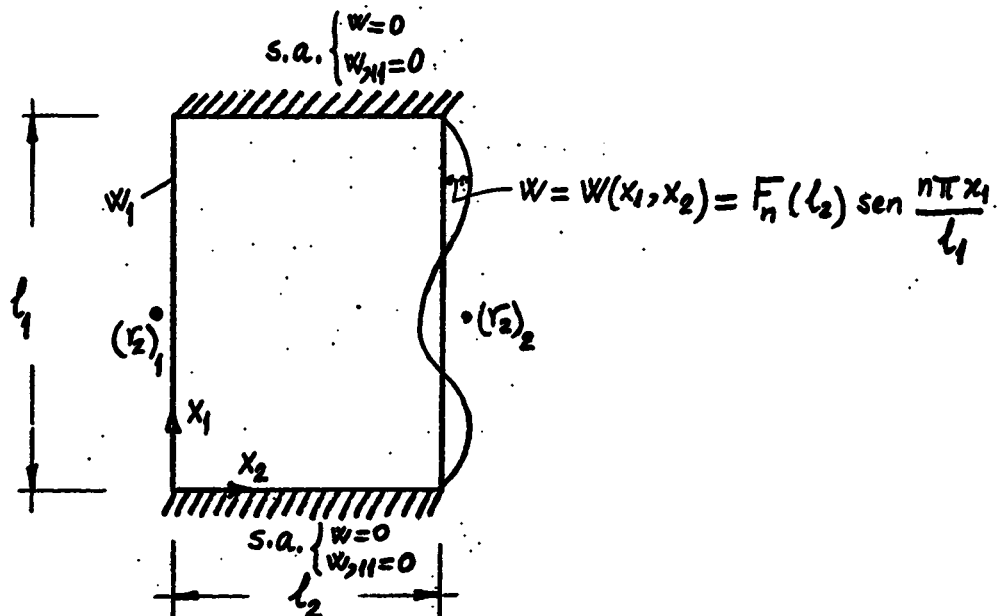


Fig. 5.3

Se parte de la ecuación diferencial de la placa:

$$\begin{cases} \nabla^4 w = \frac{Z}{D} \\ \text{c.c.} \end{cases}$$

adoptando la solución de Levy (figura 5.3).

Para la obtención de la matriz de rigidez, se considera la solución modal:

$$\begin{cases} \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial x_2^4} = 0 \\ \text{c.c.} \end{cases} \quad (5.1)$$

Se adopta la siguiente ley de flechas, como ya es conocido:

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(x_2) \sin \frac{n\pi x_1}{l_1} \quad (5.2)$$

siendo preciso señalar que cada armónico n queda perfectamente caracterizado mediante su amplitud.

Los desplazamientos y fuerzas eficaces para $x_2=0$ y $x_2=l_2$ son los que siguen, para el armónico n -simo:

$$w_1 = w(x_1, 0) = F_n(0) \operatorname{sen} \frac{n\pi x_1}{l_1} \quad (5.3-a)$$

$$w_2 = w(x_1, l_2) = F_n(l_2) \operatorname{sen} \frac{n\pi x_1}{l_1}$$

$$\theta_1 = w_{,2}|_{x_2=0} \quad (5.3-b)$$

$$\theta_2 = w_{,2}|_{x_2=l_2}$$

$$(r_2)_1 = r_2|_{x_2=0} \quad ; \quad (r_2)_2 = r_2|_{x_2=l_2} \quad (5.3-c)$$

siendo:

$$r_2 = q_2 + m_{21,1} = -D\{w_{,222} + (2-\nu) w_{,112}\}$$

y, por último:

$$(m_{22})_1 = m_{22}|_{x_2=0} \quad ; \quad (m_{22})_2 = m_{22}|_{x_2=l_2} \quad (5.3-d)$$

con:

$$m_{22} = -D(w_{,22} + \nu w_{,11})$$

La ecuación matricial que se debe encontrar es:

$$\begin{bmatrix} (r_2)_1 \\ (m_{22})_1 \\ (r_2)_2 \\ (m_{22})_2 \end{bmatrix} = \underline{K} \cdot \begin{bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \underline{K} \underline{d} \quad (5.4)$$

Siendo \underline{K} la matriz de rigidez para el armónico n-simo.

A partir de (5.2), llamando $\lambda_n = \frac{n\pi}{l_1}$ y para el armónico n-simo, se deduce, al entrar en (5.1):

$$\lambda^4 F - 2\lambda^2 F'' + F^{IV} = 0 \quad (5.5)$$

en donde se han eliminado los subíndices por comodidad.

La ecuación característica es:

$$\lambda^4 - 2\lambda^2 r^2 + r^4 = 0 \rightarrow \begin{cases} r = + \lambda \text{ (doble)} \\ r = - \lambda \text{ (doble)} \end{cases}$$

Con lo cual, resulta:

$$F = (C_1 x_2 + C_2) e^{-\lambda x_2} + (C_3 x_2 + C_4) e^{\lambda x_2} \quad (5.6)$$

en donde las constantes arbitrarias C_i ($i=1,2,3,4$) se determinan imponiendo las condiciones de contorno en $x_2=0$ y $x_2=1_2$.

Una forma cómoda de trabajar consiste en expresar la fórmula (5.6) de la siguiente manera:

$$F = (C_1 x_2 + C_3) e^{-\lambda x_2} + \{C_3(1_2 - x_2) + C_4\} e^{-\lambda(1-x_2)} \quad (5.7)$$

A partir de una expresión del tipo

$$y = (C_1 x_2 + C_2) e^{-\lambda x_2}$$

y teniendo en cuenta que su derivada d expresar en forma general como sigue:

$$y^{(K)} = (-1)^K \{\lambda^K - K\lambda^{K-1}\} \begin{bmatrix} 1 & x_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} e^{-\lambda x_2} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}$$

o bien, abreviadamente

$$y^{(K)} = \underline{B}_K \underline{P}(x_2) \underline{C}_{12}$$

Se deduce fácilmente que la derivada de orden K de (5.7) es la que se indica a continuación:

$$F^{(K)} = \underline{B}_K \underline{P}(x_2) \underline{C}_{12} + (-1)^K \underline{B}_K \underline{P}(l_2 \cdot x_2) \underline{C}_{34} \quad (5.8)$$

Precindiendo en lo sucesivo del factor $\text{sen} \lambda x_1$, es decir, considerando únicamente la amplitud del armónico n , se deduce la matriz de rigidez de la placa, \underline{K} , citada anteriormente:

$$\begin{aligned} w_1 &= \underline{B}_0 \underline{C}_{12} + \underline{B}_0 \underline{P}(l_2) \underline{C}_{34} = \{\underline{B}_0, \underline{B}_0 \underline{P}(l_2)\} \underline{C} \\ w_2 &= \underline{B}_0 \underline{P}(l_2) \underline{C}_{12} + \underline{B}_0 \underline{C}_{34} = \{\underline{B}_0 \underline{P}(l_2), \underline{B}_0\} \underline{C} \\ \theta_1 &= \underline{B}_1 \underline{C}_{12} - \underline{B}_1 \underline{P}(l_2) \underline{C}_{34} = \{\underline{B}_1, -\underline{B}_1 \underline{P}(l_2)\} \underline{C} \\ \theta_2 &= \underline{B}_1 \underline{P}(l_2) \underline{C}_{12} - \underline{B}_1 \underline{C}_{34} = \{\underline{B}_1 \underline{P}(l_2), -\underline{B}_1\} \underline{C} \end{aligned} \quad (5.9)$$

siendo

$$\underline{C}^t = (C_1, C_2, C_3, C_4) \quad (5.10)$$

El vector desplazamientos se define como:

$$d = \begin{bmatrix} \underline{d}_1 \\ \underline{d}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{B}_0 & \underline{B}_0 \underline{P}(1_2) \\ \underline{B}_0 \underline{P}(1_2) & \underline{B}_0 \\ \underline{B}_1 & -\underline{B}_1 \underline{P}(1_2) \\ \underline{B}_1 \underline{P}(1_2) & -\underline{B}_1 \end{bmatrix} \cdot \underline{C} = \underline{G}_d \underline{C} \quad (5.11)$$

Es de señalar que la matriz \underline{G}_d es no singular, ya que el problema que se está tratando es un problema de Dirichlet (sólo en desplazamientos).

Por otra parte:

$$r_2 = -D\{\underline{B}_3 \underline{P}(x_2), -\underline{B}_3 \underline{P}(1_2-x_2)\} \underline{C} + \\ + D\lambda^2\{(2-\nu)\underline{B}_1 \underline{P}(x_2) - (2-\nu)\underline{B}_1 \underline{P}(1_2-x_2)\} \underline{C}$$

es decir:

$$r_2 = -D\{[\underline{B}_3 + (2-\nu)\lambda^2 \underline{B}_1] \underline{P}(x_2), -[\underline{B}_3 + (2-\nu)\lambda^2 \underline{B}_1] \underline{P}(1_2-x_2)\} \underline{C} \quad (5.12)$$

Por lo tanto:

$$(r_2)_1 = -D\{[\underline{B}_3 + (2-\nu)\lambda^2 \underline{B}_1] \underline{P}(1_2), -[\underline{B}_3 + (2-\nu)\lambda^2 \underline{B}_1] \underline{P}(1_2)\} \underline{C} \\ (r_2)_2 = -D\{[\underline{B}_3 + (2-\nu)\lambda^2 \underline{B}_1] \underline{P}(1_2), -[\underline{B}_3 + (2-\nu)\lambda^2 \underline{B}_1] \underline{P}(1_2)\} \underline{C} \quad (5.13)$$

Análogamente:

$$m_{22} = -D\{(\underline{B}_2 - \nu\lambda^2 \underline{B}_0) \underline{P}(x_2), (\underline{B}_2 - \nu\lambda^2 \underline{B}_0) \underline{P}(1_2 - x_2)\} \underline{C} \quad (5.14)$$

de donde se deducen fácilmente $(m_{22})_1$ y $(m_{22})_2$.

Teniendo en cuenta que para la obtención del vector de fuerzas \underline{p} hay que considerar precisamente las fuerzas en los bordes de la placa y no los esfuerzos, lo cual se traduce en un simple cambio de signos, dicho vector \underline{p} es el que sigue:

$$\underline{p} = \begin{bmatrix} (r_2)_1^f \\ (m_{22})_1^f \\ (r_2)_2^f \\ (m_{22})_2^f \end{bmatrix} = D \begin{bmatrix} \{\underline{B}_3 + (2-\nu)\lambda^2 \underline{B}_1\} & -\{\underline{B}_3 + (2-\nu)\lambda^2 \underline{B}_1\} \underline{P}(1_2) \\ (\underline{B}_2 - \nu\lambda^2 \underline{B}_0) & (\underline{B}_2 - \nu\lambda^2 \underline{B}_0) \underline{P}(1_2) \\ -\{\underline{B}_3 + (2-\nu)\lambda^2 \underline{B}_1\} \underline{P}(1_2) & \{\underline{B}_3 + (2-\nu)\lambda^2 \underline{B}_1\} \underline{P}(1_2) \\ -(\underline{B}_2 - \nu\lambda^2 \underline{B}_0) \underline{P}(1_2) & (\underline{B}_2 - \nu\lambda^2 \underline{B}_0) \end{bmatrix} \times \underline{C} = \underline{G}_p \cdot \underline{C} \quad (5.15)$$

donde el superíndice "f" indica fuerza.

Es preciso indicar que normalmente suele ocurrir que \underline{G}_p sea singular (problema de Neuman), al no estar eli-

minados los movimientos de sólido rígido.

Eliminar (5.15):

$$p \quad (5.16)$$

es decir, la matriz de rigidez \underline{K} es:

$$\underline{K} = G \quad (5.17)$$

5.3. ANALISIS COMO PLACA: CALCULO DE LA SOLUCION INICIAL

Como es bien conocido, el cálculo de la solución inicial se reduce a la obtención de las reacciones de empotramiento rígido, para un cierto tipo de carga Z .

El problema a resolver es:

$$\left. \begin{array}{l} \nabla^4 w = \frac{Z}{D} \\ \text{c.c.} \left\{ \begin{array}{l} w_1 = 0 \\ \theta_1 = 0 \\ w_2 = 0 \\ \theta_2 = 0 \end{array} \right. \end{array} \right\} \quad (5.18)$$

La idea consiste en encontrar una solución particular de la ecuación (5.18).

Suponiendo el caso de carga Z cte. según x_2 , es decir $Z = Z(x_1)$, se hace:

$$Z = \sum_1^{\infty} Z_n \operatorname{sen} \lambda_n x_1 \quad (5.19)$$

Y se supone que:

$$W = \sum F_{n0}(x_1) \operatorname{sen} \lambda_n x_1 \quad (5.20)$$

es una solución particular.

Se prescinde del sumatorio, al considerar el armónico genérico n -simo. Dentro de éste, únicamente se tiene en cuenta su amplitud, con lo que resulta, al entrar en (5.18):

$$F_{n0}^{IV} - 2\lambda_n^2 F_{n0}'' + \lambda_n^4 F_{n0} = \frac{Z_n}{D} \quad (5.21)$$

y una solución particular es:

$$F_{n0} = \frac{Z_n}{D\lambda_n^4} \quad (5.22)$$

Con lo cual, la solución final es suma de la solución particular más la complementaria:

$$w = w_0 + w_c \quad (5.23-a)$$

es decir

n:

$$w = \frac{u_n}{D \lambda_n^4} + \{B_0 \underline{P}(x_2), B_0 \underline{P}(1_2 - x_2)\} \underline{C} \quad (5.23-b)$$

Imponiendo las condiciones de contorno:

$$w_1 = w_0 + \{B_0, B_0 \underline{P}(1_2)\} \underline{C} = 0 \quad (\text{por ser sol. inicial})$$

etc...

es decir:

$$\underline{d} = \underline{d}_0 + \underline{G}_p \underline{C} = \underline{0} \quad (5.24-a)$$

resulta:

$$\underline{C} = -\underline{G}_p^{-1} \underline{d}_0 \quad (5.25-a)$$

con lo cual las fuerzas de empotramiento rígido son:

$$P_0 = \underline{G}_p \underline{C} = -\underline{G}_p \underline{G}_p^{-1} \underline{d}_0 \quad (5.25)$$

5.4. ANALISIS COMO PLACA: EXPRESION DEL VECTOR RESULTANTE

El vector resultante o vector de resultados incluye los resultados de interés en el cálculo, bien para la solución complementaria, bien para la particular, bien para la suma de ambas.

Se define el vector resultante como sigue:

$$\underline{R}^t(x_1, x_2) = \{w; w_{,1}; w_{,2}; m_{11}; m_{22}; m_{12}; q_1; q_2; r_1; r_2\} \quad (5.26)$$

Los valores de $w_{,1}$, m_{12} , q_1 y r_1 varían, a lo largo de x_1 , como $\cos \lambda x_1$, mientras que los restantes esfuerzos y desplazamientos varían como $\sin \lambda x_1$.

Teniendo en cuenta las expresiones de los esfuerzos:

$$\begin{aligned} m_{11} &= -D(w_{,11} + \nu w_{,22}) \\ m_{22} &= -D(w_{,22} + \nu w_{,11}) \\ m_{12} &= -D(1-\nu)w_{,12} = m_{21} \\ q_1 &= -D(w_{,111} + w_{,122}) \\ q_2 &= -D(w_{,222} + w_{,112}) \\ r_1 &= -D(w_{,111} + (2-\nu)w_{,122}) \\ r_2 &= -D(w_{,222} + (2-\nu)w_{,112}) \end{aligned} \quad (5.27)$$

en donde $w(x_1, x_2)$ viene definida por (5.2), la expresión - del vector resultante, para el caso de la solución complementaria, es:

$$\underline{R}(x_1, x_2) = \underline{H}(x_1) \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ \lambda^2 D & 0 & -vD & 0 \\ v\lambda^2 D & 0 & -D & 0 \\ 0 & -\lambda(1-v)D & 0 & 0 \\ \lambda^3 D & 0 & -\lambda D & 0 \\ 0 & \lambda^2 D & 0 & -D \\ \lambda^3 D & 0 & -\lambda(2-v)D & 0 \\ 0 & \lambda^2(2-v)D & 0 & -D \end{bmatrix}}_{\underline{G}_R} \begin{bmatrix} w \\ w',_2 \\ w'',_{22} \\ w''',_{222} \end{bmatrix} \quad (5.28)$$

Siendo:

$$\underline{H}(x_1) = \text{diagonal } (s, c, s, s, s, c, c, s, c, s) \quad (5.29)$$

con $s = \text{sen} \lambda x_1$ y $c = \text{cos} \lambda x_1$.

La matriz \underline{G}_R (de 10 x 4) de la fórmula (5.28) contiene amplitudes.

Por otro lado, se cumple:

$$\begin{pmatrix} w \\ w_{,2} \\ w_{,22} \\ w_{,222} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{B}_0 \underline{P}(x_2) & \underline{B}_0 \underline{P}(1_2 - x_2) \\ \underline{B}_1 \underline{P}(x_2) & -\underline{B}_1 \underline{P}(1_2 - x_2) \\ \underline{B}_2 \underline{P}(x_2) & \underline{B}_2 \underline{P}(1_2 - x_2) \\ \underline{B}_3 \underline{P}(x_2) & -\underline{B}_3 \underline{P}(1_2 - x_2) \end{pmatrix} \cdot \underline{C} \quad (5.30-a)$$

O bien:

$$\begin{pmatrix} w \\ w_{,2} \\ w_{,22} \\ w_{,222} \end{pmatrix} = \underline{B} \cdot \underline{P}(x_2) \cdot \underline{C}_{12} + \underline{B}' \cdot \underline{P}(1_2 - x_2) \cdot \underline{C}_{34} \quad (5.30-b)$$

en donde:

$$\underline{B}^t = (\underline{B}_0 \ \underline{B}_1 \ \underline{B}_2 \ \underline{B}_3) ; \quad \underline{B}'^t = (\underline{B}_0 \ -\underline{B}_1 \ \underline{B}_2 \ -\underline{B}_3)$$

y eliminando las constantes \underline{C} , a través de (5.11), queda, finalmente:

$$\underline{R}(x_1, x_2) = \underline{H}(x_1) \underline{G}_R \{ \underline{B} \underline{P}(x_2), \underline{B}' \underline{P}(1_2 - x_2) \} \underline{G}_d^{-1} \cdot \underline{d} \quad (5.31)$$

5.5. ANALISIS COMO LAJA: MATRIZ DE RIGIDEZ

La técnica de análisis a seguir es exactamente igual que la desarrollada en el apartado 5.2.

Se suponen, únicamente, cargas actuando en las aristas.

Caso de existir cargas puntuales, se puede considerar un borde (y una laja) más.

La ecuación diferencial es, en este caso:

$$\begin{cases} \nabla^4 \phi = 0 \\ \text{c.c.} \end{cases} \quad (5.32)$$

Las expresiones de los esfuerzos son:

$$\begin{aligned} n_{11} = \phi,_{22} &= Eh(u_{1,1} + \nu u_{2,2}) \quad (\text{varía como } \text{sen} \lambda x_1) \\ n_{22} = \phi,_{11} &= Eh(u_{2,2} + \nu u_{1,1}) \quad (\text{varía como } \text{sen} \lambda x_1) \\ n_{12} = -\phi,_{12} &= \frac{Eh}{2(1+\nu)}(u_{1,2} + u_{2,1}) \quad (\text{varía como } \text{cos} \lambda x_1) \end{aligned} \quad (5.33)$$

$$\text{Se toma } \phi = \sum \phi_n(x_2) \text{ sen} \lambda x_1 \quad (5.34)$$

Y considerando el armónico n-simo, y sustituyendo en la ecuación diferencial, se deduce de forma análoga al caso de placa:

$$\phi_n^{(K)}(x_2) = \{ \underline{B}_K \underline{P}(x_2); (-1)^K \underline{B}_K \underline{P}(1_2 - x_2) \} \underline{C} \quad (5.35)$$

Siguiendo los pasos ya vistos, y considerando solamente las amplitudes, se obtienen fácilmente:

$$\underline{d} = \begin{bmatrix} (u_1)_1 \\ (u_2)_1 \\ (u_1)_2 \\ (u_2)_2 \end{bmatrix} = \underline{G}_d \underline{C} \quad (5.36)$$

$$\underline{p} = \begin{bmatrix} (n_{12}^f)_1 \\ (n_{22}^f)_1 \\ (n_{12}^f)_2 \\ (n_{22}^f)_2 \end{bmatrix} = \underline{G}_p \underline{C} \quad (5.37)$$

relaciones de las que fácilmente se deduce la matriz de rigidez de la laja eliminando \underline{C} .

5.6. ANALISIS COMO LAJA: VECTOR RESULTANTE

Se define el vector resultante como sigue:

$$\underline{R}^t(x_1, x_2) = (u_1, u_2, n_{11}, n_{22}, n_{12}) \quad (5.38)$$

en donde u_1 y n_{12} varían como $\cos \lambda x_1$ y los restantes como $\sin \lambda x_1$.

De modo análogo a lo ya visto, se deduce:

$$\underline{R}(x_1, x_2) = \underline{H}(x_1) \underline{G}_R \{ \underline{B} \underline{P}(x_2), \underline{B}' \underline{P}(1_2 - x_2) \} \underline{C} \quad (5.39)$$

siendo

$$\underline{G}_R = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-\lambda v}{Eh(1-v^2)} & 0 & \frac{-1}{\lambda Eh(1-v^2)} \\ \frac{-\lambda^2}{Eh(1-v^2)} & 0 & \frac{-v}{Eh(1-v^2)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\lambda^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 \end{bmatrix} \quad (5.40)$$

$$\text{y } \underline{H}(x_1) = \text{diagonal } (c, s, s, s, c) \quad (5.41)$$

5.7. MATRIZ DE RIGIDEZ DE LA LAMINA PLEGADA

A partir de los desarrollos teóricos realizados en los apartados 5.2 y 5.5, la matriz de rigidez de la lámina plegada se deduce como sigue:

Para el armónico n -simo, el problema de flexión es:

$$p_f = \underline{K}_f \underline{d}_f + p_f^o \quad (5.42)$$

y el problema de extensión es:

$$p_e = \underline{K}_e \underline{d}_e + p_e^o \quad (5.43)$$

Ambos problemas ya han sido resueltos en los apartados citados más arriba.

Al estar desacoplados los efectos de la flexión y de la extensión, las expresiones (5.42) y (5.43) pueden ser englobadas en una sola ecuación, tal como a continuación se indica:

$$p = \begin{pmatrix} p_f \\ p_e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{K}_f & 0 \\ 0 & \underline{K}_e \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{d}_f \\ \underline{d}_e \end{pmatrix} = \underline{K} \underline{d} \quad (5.44)$$

en donde \underline{K} es la matriz de rigidez de la lámina plegada.

En la práctica, conviene trabajar utilizando como vector de fuerzas y vector de desplazamientos los que siguen:

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_{f1} \\ P_{e1} \\ P_{f2} \\ P_{e2} \end{Bmatrix} ; \quad \begin{Bmatrix} \underline{d}_1 \\ \underline{d}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \underline{d}_{f1} \\ \underline{d}_{e1} \\ \underline{d}_{f2} \\ \underline{d}_{e2} \end{Bmatrix} \quad (5.45)$$

y la relación matricial, que va no estará desacoplada, es:

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \underline{K}_{11} & \underline{K}_{12} \\ \underline{K}_{21} & \underline{K}_{22} \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \underline{d}_1 \\ \underline{d}_2 \end{Bmatrix} \quad (5.46)$$

5.8. LAMINA PLEGADA CON ELEMENTOS "VIGA"

5.8.1. Introducción

En las estructuras de lámina plegada puede suceder que existan elementos que hayan de ser considerados como monodimensionales (vigas) en el análisis estructural -- (figura 5.1-b). En tal caso, se adopta, para estos elementos, un sistema ortogonal de ejes locales como el definido en la figura 5.4.

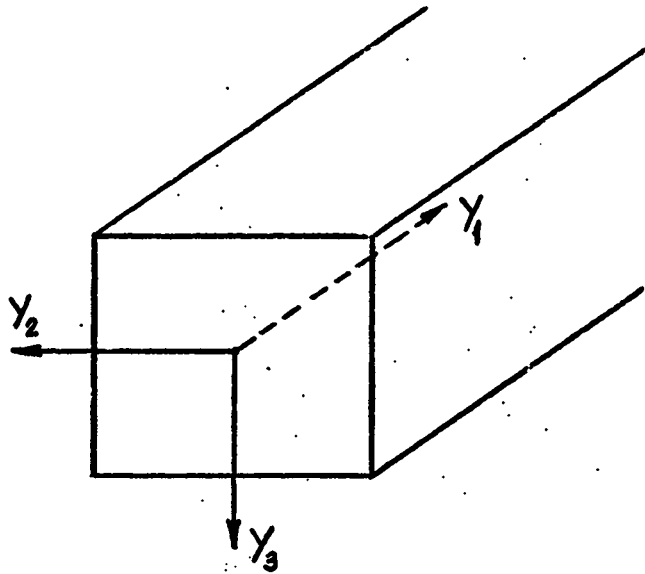


Fig. 5.4

y_2 e y_3 son los ejes principales de inercia de la sección transversal constante de la viga.

5.8.2. Matriz de rigidez de la viga

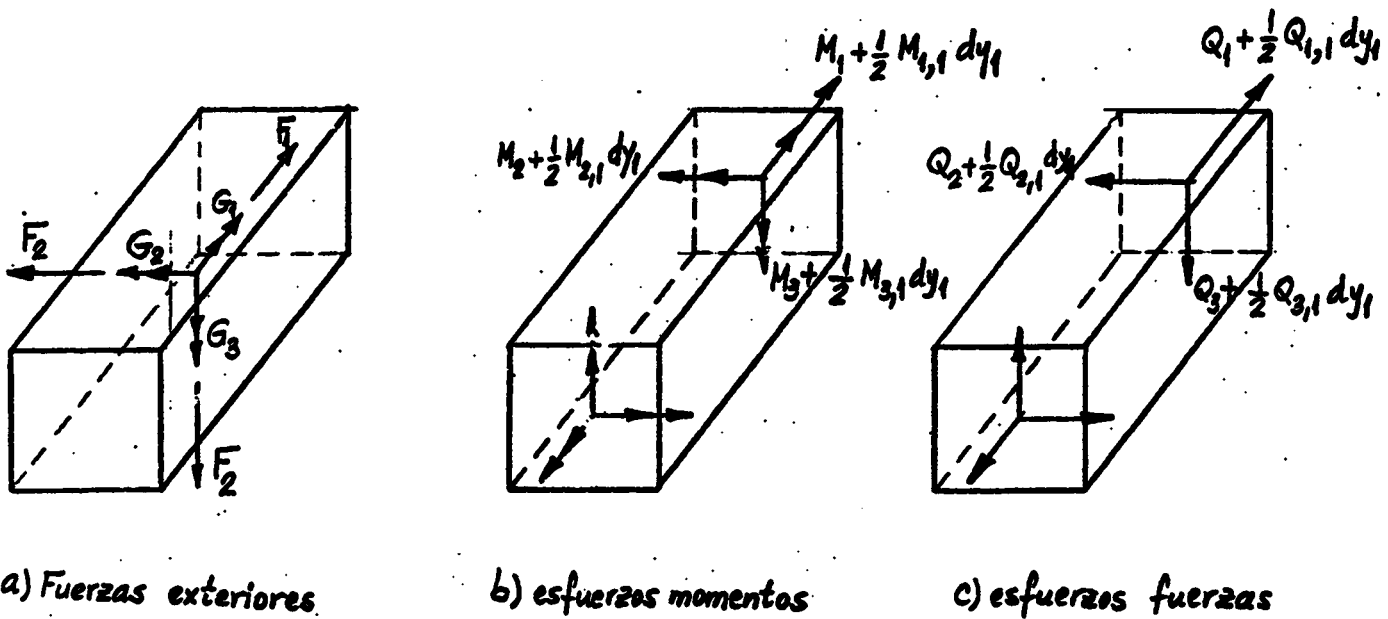


Fig. 5.5

Se denominan F_i y G_i ($i=1,2,3$) a las fuerzas exteriores que actúan por unidad de longitud sobre la viga - en su centro de gravedad. U_i ($i=1,2,3$) y θ son los desplazamientos y el giro alrededor de y_1 en dicho punto.

Los esfuerzos resultantes y sus sentidos positivos vienen indicados en las figuras 5.5-b y 5.5-c.

Admitiendo la hipótesis de que las secciones permanecen planas, que puede ser plausible al estudiar la flexión y la extensión, pero que respecto a la torsión no es - válida, se obtienen las siguientes relaciones constitutivas:

$$\begin{aligned} F_1 &= -Q_{1,1} = -E A U_{1,11} \\ F_2 + G_{3,1} &= -Q_{2,1} + G_{3,1} = -M_{3,11} = EI_2 U_{2,1111} \\ F_3 - G_{2,1} &= -Q_{3,1} - G_{2,1} = M_{2,11} = E I_3 U_{3,1111} \\ G_1 &= -M_{1,1} = - \frac{E J}{2(1+\nu)} \theta_{,11} \end{aligned} \quad (5.47)$$

Si se definen S_1 , S_2 , S_3 y T_1 por las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} S_1 &= F_1 \\ S_2 &= F_2 + G_{3,1} \\ S_3 &= F_3 - G_{2,1} \\ T_1 &= G_1 \end{aligned} \quad (5.48)$$

y se admite que son funciones únicamente de la dirección y_1 del tipo $\sin \lambda y_1$, excepto S_1 , que es función de $\cos \lambda y_1$, se obtiene:

$$\begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ T_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} EA\lambda^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & EI_2\lambda^4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & EI_3\lambda^4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{E\lambda^2 J}{2(1+\nu)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ \theta \end{bmatrix} \quad (5.49-a)$$

o más compactamente:

$$\underline{P}_v = \underline{K}_v \underline{D}_v \quad (5.49-b)$$

En donde los elementos de las matrices \underline{P}_v y \underline{D}_v representan las amplitudes de las funciones trigonométricas correspondientes.

5.8.3. Expresión de los esfuerzos

De las ecuaciones (5.47) se puede deducir la expresión de los esfuerzos internos de la viga, obteniéndose:

$$\underline{R}_v = \begin{bmatrix} Q_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -EA\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^3 EI_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^3 EI_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\lambda EJ}{2(1+\nu)} \\ 0 & 0 & -\lambda^2 EI_3 & 0 \\ 0 & \lambda^2 EI_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ \theta \end{bmatrix} \quad (5.50-a)$$

O más compactamente:

$$\underline{R}_v = \underline{H} \underline{D}_v \quad (5.50-b)$$

siendo

$$R_2 = Q_2 - G_3 \quad \text{y} \quad R_3 = Q_3 + G_2$$

Todos los esfuerzos en la viga varían longitudinalmente como $\text{sen} \lambda y_1$, excepto R_2 , R_3 y M_1 que lo hacen como $\text{cos} \lambda y_1$.

Los elementos de \underline{R}_v son las amplitudes de estas funciones trigonométricas.

5.8.4. ENSAMBLAJE

Para el ensamblaje de la matriz de rigidez del conjunto losas-vigas, se siguen técnicas típicas de cálculo matricial de estructuras, considerando a las vigas como nudos de dimensión finita.

5.9. ESQUEMA DE UN PROGRAMA DE CALCULO

DO para cada armónico

- Cálculo de z_n
- Cálculo $K_m = G_p G_d^{-1}$
- Cálculo P_m^o
- Ensamblaje $\begin{bmatrix} K_m \\ P_m^o \end{bmatrix} : \underline{K} \underline{D} = \underline{P}$
- Resolución del sistema
- $\underline{R}(x_1, x_2)$ de cada losa (y viga) acumulando armónicos.

5.10. INTRODUCCION, EN EL CALCULO, DE LAS COMPRESIONES EN LA PLACA

Se hace una hipótesis adicional, suponiendo que se cumple que $n_{12}=0$ (en realidad, esto no es cierto). La ecuación diferencial que resulta es:

$$D\nabla^4 w + (n_{22} w_{,11} + n_{11} w_{,22}) = z \quad (5.51)$$

El proceso de cálculo sigue los mismos pasos: En primer lugar se resuelve la ecuación homogénea ($Z = 0$):

$$\text{Se hace } \bar{n}_{22} = \frac{n_{22}}{D} ; \bar{n}_{11} = \frac{n_{11}}{D} \quad (5.52)$$

La ecuación cuya solución se busca es:

$$\nabla^4 w + (\bar{n}_{22} w_{,11} + \bar{n}_{11} w_{,22}) = 0$$

$$\text{Se supone } w = F(x_2) \text{sen} \lambda x_1$$

y la ecuación característica que resulta es:

$$F^{IV} - 2\lambda^2 F'' + \lambda^4 F - \lambda^2 \bar{n}_{22} F + \bar{n}_{11} F'' = 0$$

es decir

$$F^{IV} + (-2\lambda^2 + \bar{n}_{11}) F'' + (\lambda^4 - \lambda^2 \bar{n}_{22}) F = 0 \quad (5.53)$$

Y se debe estudiar la solución en raíces de la ecuación anterior. El problema sigue luego los pasos ya conocidos.

Según se desprende de la ecuación (5.53), el único inconveniente estriba en la introducción de los valores \bar{n}_{11}

y \bar{n}_{22} , que tienen que ser valores conocidos.

6. TECNICAS NUMERICAS DE RESOLUCION DE PROBLEMAS ESTRUCTURALES EN LOS QUE APARECEN DERIVADAS PARCIALES

6.1. INTRODUCCION: EJEMPLO DE APLICACION

Un ejemplo de posible aplicación de las técnicas numéricas citadas es el problema de la torsión de Saint-Venant:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + 2G\theta = 0 \\ \text{c.c.} \end{array} \right.$$

en donde:

$$\tau_{xz} = \frac{\partial \phi}{\partial y} ; \tau_{yz} = \frac{\partial \phi}{\partial x} , M_t = 2 \iint \phi \, dx \, dy$$

El problema anterior es semejante al que sigue:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 1 = 0 \quad \text{en un dominio } A \\ u = 0 \quad \text{en el contorno } \bar{A} \end{array} \right. \quad \{6.1\}$$

La resolución de {6.1} equivale a minimizar:

$$I = \iint_A \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - u \right\} dA \quad \{6.2\}$$

Si se aplica la fórmula de Euler a {6.2}, se tie-

ne:

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x} F_{u_x} - \frac{\partial}{\partial y} F_{u_y} = 0 \quad \{6.3-a\}$$

$$\frac{\partial F}{\partial u} = -1 ; F_{u_x} = 2 \frac{\partial u}{\partial x} ; F_{u_y} = 2 \frac{\partial u}{\partial y}$$

Y la ecuación de Euler queda como sigue:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 1 = 0 \quad \{6.3-b\}$$

En este ejemplo se supone un contorno, como el definido en la figura 6.1.

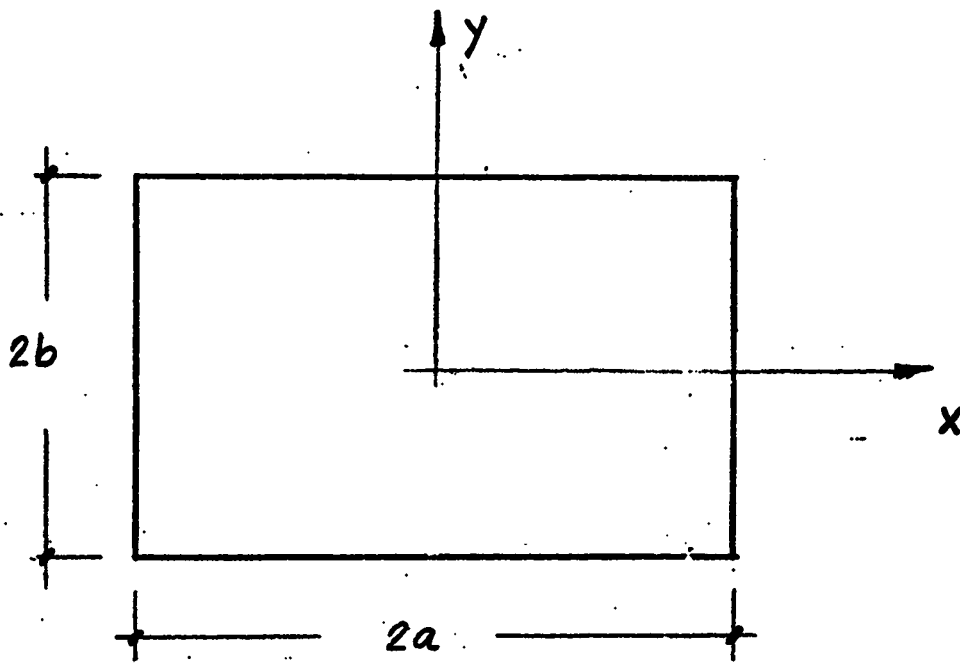


Figura 6.1

6.2. METODO DE COLOCACION

Se define una función que satisfaga las condiciones de contorno (figura 6.1).

$$u=u(x,y)=(x^2-a^2)(y^2-b^2)\{\alpha_1+\alpha_2(x^2+y^2)+\alpha_3(x^4+x^2y^2+y^4)+\dots\} \quad \{6.4\}$$

En {6.4} se ha completado la función con un polinomio con términos pares en este caso, ya que se trata de un problema simétrico.

Se define una función error, ϵ , y se hace nula en una serie de puntos. Dicha función se define entrando con {6.4} en {6.3-b}:

-1 término: $u=u(x,y)=(x^2-a^2)(y^2-b^2)\alpha_1=u^{(1)}$

$$\epsilon^{(1)}=2(y^2-b^2)\alpha_1+2(x^2-a^2)\alpha_1+1$$

Y se anula en el punto (0,0):

$$-2\alpha_1(a^2+b^2)+1=0 \quad \rightarrow \quad \alpha_1 = \frac{1}{2(a^2+b^2)}$$

Por lo tanto:

$$u^{(1)}(x,y) = \frac{1}{2(a^2+b^2)}(x^2-a^2)(y^2-b^2) \quad \{6.5-a\}$$

y en el caso de $a=b$, resulta:

$$u(0,0) = 0,250 a^2$$

-2 términos: $u=u(x,y) = (x^2-a^2)(y^2-b^2)\{\alpha_1+\alpha_2(x^2+y^2)\}=u^{(2)}$

$$\begin{aligned} \epsilon^{(2)} = & 2(y^2-b^2)\{\alpha_1+\alpha_2(x^2+y^2)\} + (x^2-a^2)(y^2-b^2)2\alpha_2 + 2(x^2-a^2)\{\alpha_1+\alpha_2(x^2+y^2)\} \\ & + (x^2-a^2)(y^2-b^2)2\alpha_2 + 8\alpha_2\{x^2(y^2-a^2)+y^2(x^2-a^2)\} \end{aligned}$$

Se hace $\epsilon^{(2)}=0$ en $(0,0)$ y en $(\frac{a}{2}, \frac{b}{2})$, con lo que - resulta, en el supuesto de que $a=b$:

$$\alpha_1 = \frac{25}{84a^2} ; \quad \alpha_2 = \frac{1}{21a^4}$$

resultando:

$$u^{(2)}=u(x,y)=(x^2-a^2)(y^2-a^2)\left\{\frac{25}{84a^2} + \frac{x^2+y^2}{21a^4}\right\} \quad \{6.5-b\}$$

y:

$$u(0,0)=0,2976 a^2$$

Es de señalar que el método de colocación aproxima muy bien la solución en aquellos puntos en que x se ha hecho $\epsilon=0$. En este caso, obviamente, también aproxima en los

simétricos:

$$\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right), \left(-\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right), \left(\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right)$$

6.3. METODO DE LAS REGIONES

Se define como en el método de colocación una función que satisfaga las condiciones de contorno (figura 6.1). Esa función es la ecuación {6.4},

Se define igualmente la función error entrando con {6.4} en {6.3-b}. Sin embargo en este caso en vez de anular el error en una serie de puntos se anula en un recinto. Si se toma el recinto rayado de la figura 6.2 y un término de aproximación se tiene:

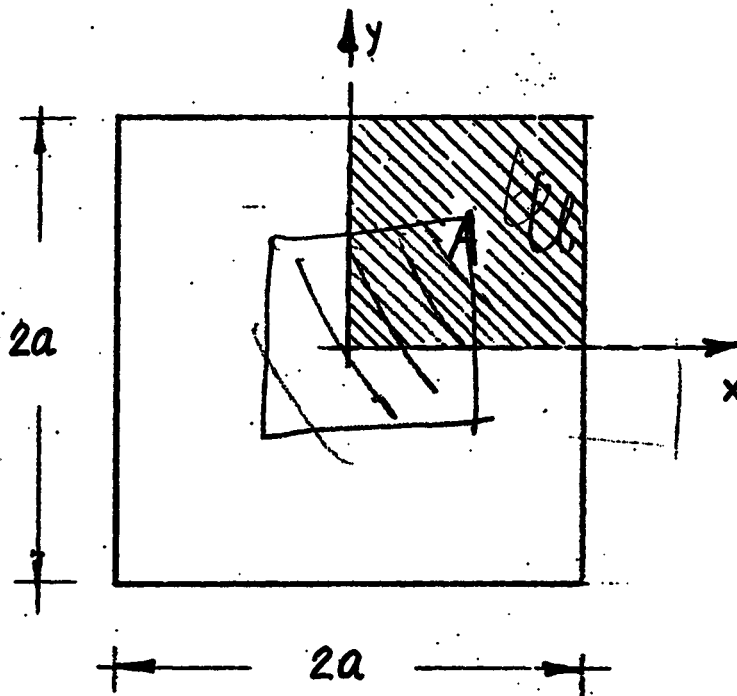


Figura 6.2

$$u^{(1)} = (x^2 - a^2) (y^2 - a^2) \alpha_1$$

se hace cero el error:

$$\iint_A \epsilon^{(1)} dx dy = 0 = \iint_A \{2(y^2 - a^2) \alpha_1 + 2(x^2 - a^2) \alpha_1 + 1\} dx dy = 0$$

$$-\frac{22 a^4 \alpha_1}{24} + \frac{a^2}{4} = 0 \quad \alpha_1 = \frac{3a^2}{11a^4} = \frac{3}{11a^2}$$

y la función resulta:

$$u^{(1)} = \frac{3}{11a^2} (x^2 - a^2) (y^2 - a^2) ; u_1(0,0) = 0,2727 a^2$$

que por simetría aproxima igualmente en todo el cuadrado.

Si se tomasen dos términos se tendría:

$$u \approx (x^2 - a^2) (y^2 - a^2) \{\alpha_1 + \alpha_2(x^2 + y^2)\} = u^{(2)}$$

y haciendo cero el error en los subdominios A y B de la figura 6.3 se tiene:

$$\begin{aligned} \epsilon^{(2)} = & 4\alpha_2(x^2 - a^2)(y^2 - a^2) + 8\alpha_2\{x^2(y^2 - a^2) + y^2(x^2 - a^2)\} + \\ & + 2\{\alpha_1 + \alpha_2(x^2 + y^2)\}(x^2 + y^2 - 2a^2) + 1 = 16\alpha_2(x^2y^2 - a^2x^2 - a^2y^2) + 2\alpha_1(x^2 + y^2) + \\ & + 2\alpha_2(x^4 + y^4 + 4x^2y^2) + 1 + 4\alpha_2a^4 - 4\alpha_2a^4 - 4\alpha_1a^2 \end{aligned}$$

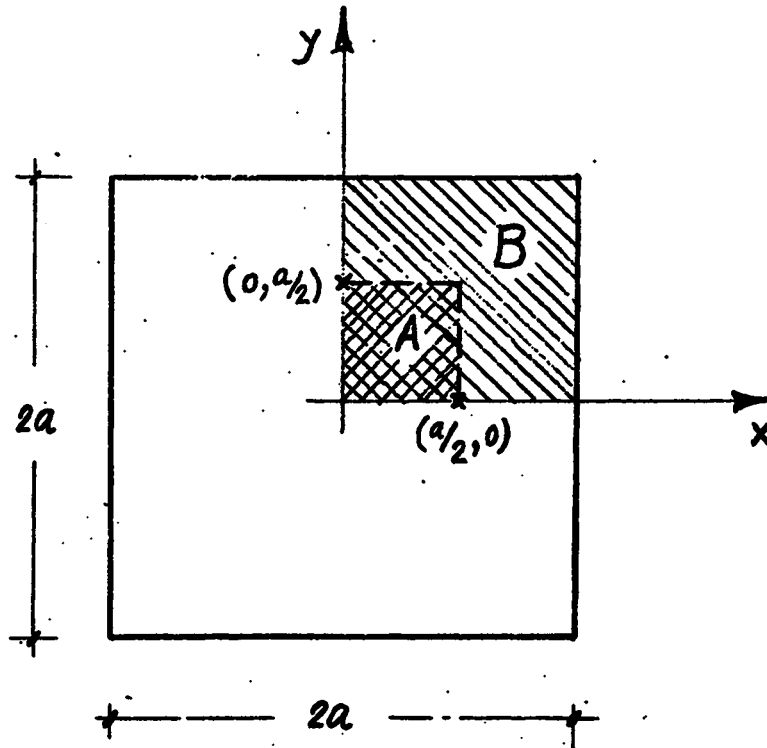


Figura 6.3

$$\begin{cases} \iint_A \varepsilon^{(2)} dx dy = 0 & -209 \alpha_2 a^6 - 3760 \alpha_1 a^4 + 960 a^2 = 0 \\ \iint_B \varepsilon^{(2)} dx dy = 0 & -147 \alpha_2 a^6 - 220 \alpha_1 a^4 + 60 a^2 = 0 \end{cases}$$

de donde se deduce:

$$\alpha_1 = \frac{64.290}{253.370 a^2} = \frac{0,2537}{a^2}$$

$$\alpha_2 = \frac{7.200}{253.370 a^4} = \frac{0,0284}{a^4}$$

y de aquí resulta

$$u^{(2)} = (x^2 - a^2)(y^2 - a^2) \left\{ \frac{0,2537}{a^2} + \frac{0,0284}{a^4} (x^2 + y^2) \right\}$$

y

$$u^{(2)}(0,0) = 0,2537 a^2$$

solución lógica pues se acerca a la solución de colocación con un solo término en el centro, ya que en esta solución se ha dado mucho peso al centro, vistas las regiones de la figura 6.3.

6.4. METODO DE GALERKIN

Este método consiste en hacer mínimo el error. Se sabe, a diferencia del caso de Rayleigh-Ritz, que el problema no debe de ser necesariamente autoadjunto.

Hacer el error mínimo equivale a hacer:

$$\iint_A \epsilon u_1 dS = 0 \quad \text{siendo } A \text{ el área total del cuadrado.}$$

Para el caso de un solo término se tiene:

$$u^{(1)} = (x^2 - a^2)(y^2 - a^2)\alpha_1$$

$$\epsilon^{(1)} = 2(y^2 - a^2)\alpha_1 + 2(x^2 - a^2)\alpha_1 + 1$$

$$\iint_A \{2(y^2 - a^2)\alpha_1 + 2(x^2 - a^2)\alpha_1 + 1\} (x^2 - a^2)(y^2 - a^2)\alpha_1 dx dy = 0$$

operando se obtiene:

W

$$-\frac{2.233}{720} \alpha_1 a^2 + \frac{121}{144} = 0$$

$$\alpha_1 = \frac{605}{2233} \frac{1}{a^2} = \frac{0,2709}{a^2}$$

$$u^{(1)} = \frac{0,2709}{a^2} (x^2 - a^2) (y^2 - a^2)$$

y en (0,0) queda:

$$u^{(1)}(0,0) = 0,2709 a^2$$

6.5. METODO DE LOS MINIMOS CUADRADOS

Este método minimiza el cuadrado del error. Como se sabe es el más aproximado.

En este caso lo que se hace mínima es la expresión:

$$\iint \epsilon_1^2 dS$$

que equivale a hacer:

$$\iint \epsilon_1 L u_1 dS = 0$$

En el caso de tener una sola incógnita en la fun-

ción de aproximación se tiene:

$$u^{(1)} = (x^2 - a^2) (y^2 - a^2) \alpha_1$$

$$\varepsilon^{(1)} = 2(y^2 - a^2) \alpha_1 + 2(x^2 - a^2) \alpha_1 + 1$$

$$L u^{(1)} = 2(y^2 - a^2) \alpha_1 + 2(x^2 - a^2) \alpha_1$$

$$\iint \{2\alpha_1 (x^2 + y^2 - 2a^2) + 1\} (x^2 + y^2 - 2a^2) 2\alpha_1 dx dy = 0$$

$$2\alpha_1 a^6 \left(\frac{1}{80} + 4 + \frac{2}{144} - \frac{8}{12} \right) + 2a^4 \left(\frac{1}{12} - 1 \right) = 0$$

$$\alpha_1 = \frac{0,2718}{a^2}$$

de donde

$$u^{(1)} = \frac{0,2718}{a^2} (x^2 - a^2) (y^2 - a^2)$$

y

$$u^{(1)}(0,0) = 0,2718 a^2$$

6.6. METODO DE APROXIMACION DE CONTORNO

Este método alternativo de los anteriores, considera unas soluciones aproximadas que cumplen la ecuación diferencial, pero no las condiciones de contorno. En todo lo anterior se ha supuesto que las funciones cumplían las condiciones de contorno pero no la ecuación diferencial, y lo

que se hacía era que el error cometido fuese mínimo de una forma u otra. Este método es similar, pero lo que pretende es hacer mínima la desviación de la solución aproximada en el contorno.

Se supone una solución del tipo:

$$u^{(N)} = u_0 + \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots$$

donde:

$u^{(N)}$ es la solución aproximada.

u_0 es una solución particular de la ecuación diferencial.

u_1 son funciones que cumplen la ecuación diferencial homogénea y son linealmente independientes.

Así pues:

$$u^{(N)} = u_0 + \sum_{i=1}^N \alpha_i u_i$$

El problema que se presenta es:

$$\begin{cases} L u = f \\ u = g(s) \text{ en el contorno} \end{cases}$$

Lo que se pretende es que la función aproximada se acomode lo mejor posible a las condiciones de contorno $\{u=g(s)\}$. Para ello se define el error en el contorno:

$$\varepsilon(s) = g(s) - u_0 - \sum_{i=1}^N \alpha_i u_i$$

Y es este error el que se puede hacer tan pequeño como se quiera con métodos como colocación, regiones, Galerkin o mínimos cuadrados.

En la ecuación diferencial {6.1} se tendrá:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 1 = 0 \\ u = g(s) \text{ en el contorno} \end{cases} \quad \{6.4\}$$

$$u^{(N)} = u_0 + \sum_{i=1}^N \alpha_i u_i$$

una solución particular que no cumple las condiciones de contorno es:

$$u_0 = -\frac{1}{4} x^2 - \frac{1}{4} y^2$$

soluciones u_i de $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, (ecuación diferencial homogénea) hay infinitas no numerables.

El problema se puede resolver de muchas formas. Una de ellas es considerar una función compleja analítica que cumpla las condiciones de Cauchy-Riemann. Cualquier función de este tipo, armónica, tiene la propiedad de que tanto la parte real como la imaginaria cumplen la ecuación diferencial homogénea:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \{6.5\}$$

Unas funciones de este tipo y además simétricas son $z = (x+iy)^{2n}$. La simetría es necesaria por las condiciones de contorno. (Ver figura 6.4).

Así se tiene las soluciones:

$$u_1 = x^4 - 6x^2 y^2 + y^4$$

$$u_3 = x^8 - 28x^6 y^2 + 70x^4 y^4 - 28x^2 y^6 + y^8$$

6.6.1 Método de colocación en el contorno

Se supone la función aproximada siguiente:

$$u^{(1)} = -\frac{1}{4} x^2 - \frac{1}{4} y^2 + \alpha_1$$

$$u = g(s) = 0 \quad \text{en el contorno}$$

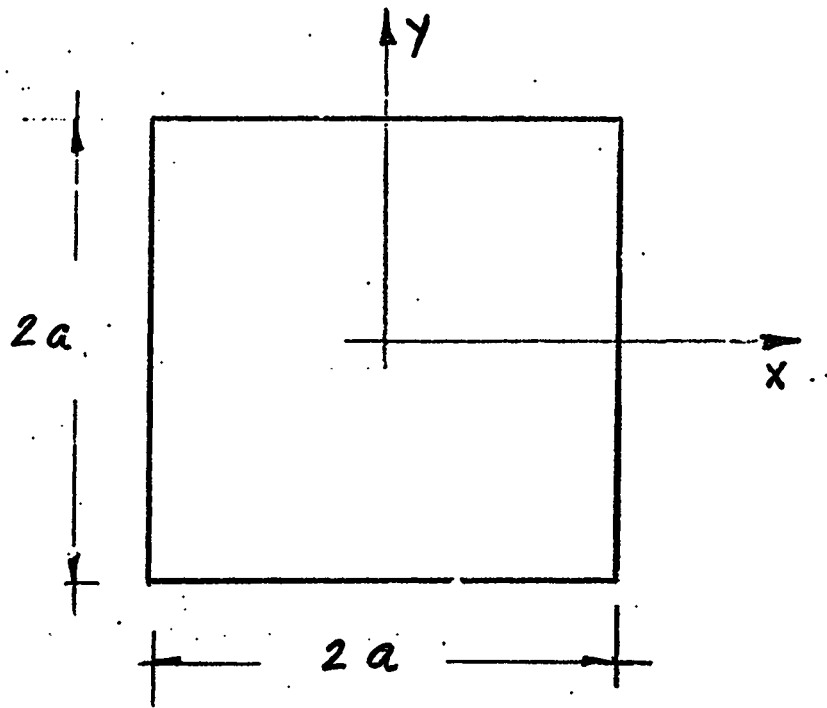


Figura 6.4

$$\epsilon^{(1)} = -\frac{1}{4} x^2 - \frac{1}{4} y^2 + \alpha_1$$

Si se hace cero el error en (a,a) se hace cero también por simetría en todos los vértices.

$$\epsilon^{(1)} = 0 = -\frac{1}{4} \frac{(2a)^2}{4} - \frac{1}{4} \frac{(2a)^2}{4} + \alpha_1$$

$$\alpha_1 = \frac{(2a)^2}{16} \cdot 2 = \frac{(2a)^2}{8}$$

$$u^{(1)} = -\frac{1}{4} x^2 - \frac{1}{4} y^2 + \frac{(2a)^2}{8}$$

$$u^{(1)}(0,0) = 0,1250 (2a)^2 = 0,5000 a^2$$

Si se toman dos términos de aproximación se tiene:

$$u^{(2)} = -\frac{1}{4} x^2 - \frac{1}{4} y^2 + \alpha_1 + \alpha_2 (x^4 - 6x^2y^2 + y^4)$$

$$\epsilon^{(2)} = -\frac{1}{4} x^2 - \frac{1}{4} y^2 + \alpha_1 + \alpha_2 (x^4 - 6x^2y^2 + y^4)$$

Si se hace cero en los vértices (a,a) y en los puntos medios de los lados $(0,a)$ se tiene:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 - \frac{(2a)^4}{4} \alpha_2 &= \frac{(2a)^2}{8} \\ \alpha_1 + \frac{(2a)^4}{16} \alpha_2 &= \frac{(2a)^2}{16} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{3(2a)^2}{40} = 0,3000 a^2 \\ \alpha_2 &= \frac{-1}{5(2a)^2} = -\frac{0,0500}{a^2} \end{aligned}$$

$$u^{(2)} = -\frac{1}{4} x^2 - \frac{1}{4} y^2 + \frac{3(2a)^2}{40} - \frac{1}{5(2a)^2} (x^4 - 6x^2y^2 + y^4)$$

$$u^{(2)}(0,0) = 0,0750(2a)^2 = 0,3000 a^2$$

6.6.2 Método de las regiones en el contorno

Suponiendo:

$$u^{(1)} = -\frac{1}{4} x^2 - \frac{1}{4} y^2 + \alpha_1$$

$$\epsilon^{(1)} = -\frac{1}{4} x^2 - \frac{1}{4} y^2 + \alpha_1$$

y se hace cero este error en la línea gruesa indicada en la figura 6.5.

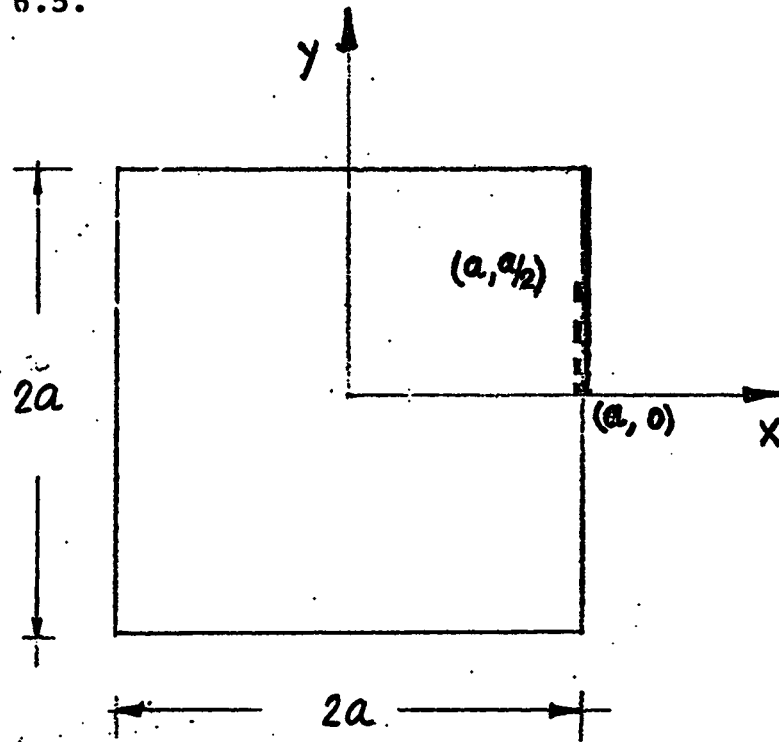


Figura 6.5

Se hace:

$$\int_{\substack{y=0 \\ x=a}}^{y=a} \epsilon(1) dS = \int_0^a \left(-\frac{1}{4} \frac{(2a)^2}{4} - \frac{1}{4} y^2 + \alpha_1 \right) dy =$$

$$= \int_0^a \left(-\frac{(2a)^2}{16} - \frac{y^2}{4} + \alpha_1 \right) dy = 0$$

$$-\frac{(2a)^3}{32} - \frac{(2a)^3}{96} + \alpha_1 \frac{(2a)}{2} = 0$$

$$\alpha_1 = 0,0833(2a)^2 = 0,3332 a^2$$

Cuando se utilizan dos términos se tiene:

$$u^{(2)} = -\frac{1}{4} x^2 - \frac{1}{4} y^2 + \alpha_1 + \alpha_2 (x^4 - 6x^2 y^2 + y^4)$$

en el contorno $\varepsilon^{(2)} = u^{(2)}$.

Se hace cero el error medio en las líneas gruesa y de puntos de la figura 6.5.

$$\int_0^a \left\{ -\frac{1}{4} x^2 - \frac{1}{4} y^2 + \alpha_1 + \alpha_2 (x^4 - 6x^2 y^2 + y^4) \right\} dy = 0$$

$x=a$

$$\int_0^a \left\{ -\frac{1}{4} x^2 - \frac{1}{4} y^2 + \alpha_1 + \alpha_2 (x^4 - 6x^2 y^2 + y^4) \right\} dy = 0$$

$x=a$

$$0,0417(2a)^3 = \frac{(2a)}{2} \alpha_1 - 0,0250(2a)^5 \alpha_2$$

$$0,0169(2a)^3 = \frac{(2a)}{4} \alpha_1 + 0,0080(2a)^5 \alpha_2$$

de donde se tiene:

$$\alpha_1 = 0,0738(2a)^2 = 0,2952 a^2$$

$$\alpha_2 = - \frac{0,1927}{(2a)^2} = - \frac{0,0482}{a^2}$$

$$u^{(2)} = -\frac{1}{4} x^2 - \frac{1}{4} y^2 + 0,0738(2a)^2 - \frac{0,01927}{(2a)^2} (x^4 - 6x^2 y^2 + y^4)$$

$$u^{(2)}(0,0) = 0,2952 a^2$$

6.6.3. Método de Galerkin en el contorno

Para hacer mínimo el error se hace:

$$\oint u_i \varepsilon^j ds = 0$$

$$\oint u_i \{g(s) - u_0 - \sum_1^N \alpha_i u_i\} ds = 0$$

En el caso de considerar una sola aproximación se tiene:

$$u^{(1)} = -\frac{1}{4} x^2 - \frac{1}{4} y^2 + \alpha_1$$

$$\varepsilon^{(1)} = -\frac{1}{4} x^2 - \frac{1}{4} y^2 + \alpha_1$$

Si el elemento que se considera es el de la figura 6.6, se tiene, integrando a lo largo de la línea gruesa que es como hacerlo en todo el contorno:

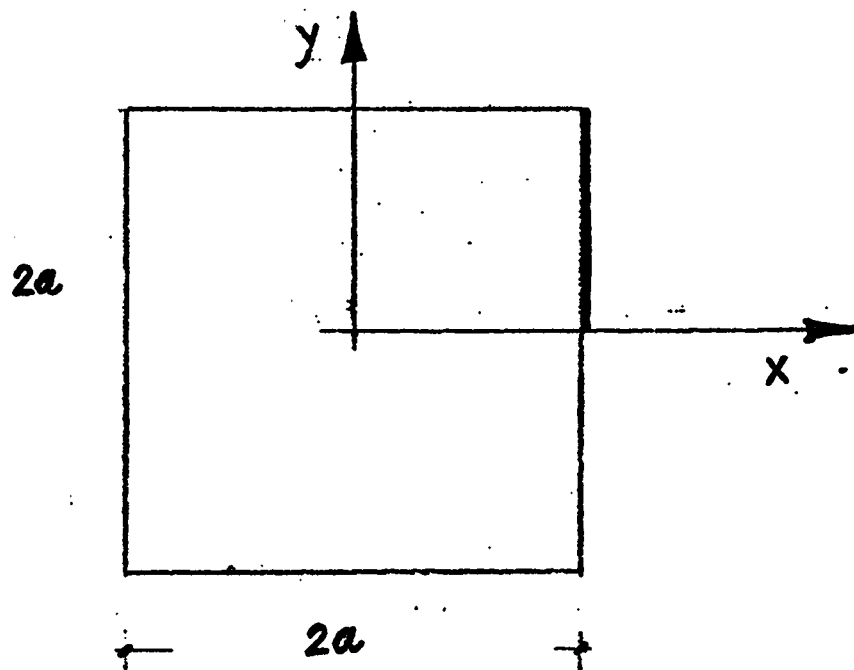


Figura 6.6

$$\int_0^a \left(-\frac{1}{4} x^2 - \frac{1}{4} y^2 + \alpha_1 \right) 1 dy = 0$$

$x=a$

$$\alpha_1 = 0,0833(2a)^2 ; u^{(1)} = -\frac{1}{4} x^2 - \frac{1}{4} y^2 + 0,0833(2a)^2$$

$$u^{(1)}(0,0) = 0,0833(2a)^2 = 0,3332 a^2$$

Si se utilizan dos funciones de aproximación se tiene:

$$u^{(2)} = -\frac{1}{4} x^2 - \frac{1}{4} y^2 + \alpha_1 + \alpha_2(x^4 - 6x^2y^2 + y^4)$$

$$\epsilon^{(2)} = -\frac{1}{4} x^2 - \frac{1}{4} y^2 + \alpha_1 + \alpha_2(x^4 - 6x^2y^2 + y^4)$$

efectuando las integrales siguientes se obtiene el error mínimo:

$$\int_0^a \alpha_1 \epsilon^2 dy = 0$$

$x=a$

$$\int_0^a \alpha_2 (x^4 - 6x^2y^2 + y^4) \epsilon^2 dy = 0$$

$x=a$

$$\int_0^a \left\{ -\frac{1}{4} - \frac{(2a)^2}{4} - \frac{1}{4} + \alpha_1 + \alpha_2 \left\{ \frac{(2a)^4}{16} - \frac{6(2a)^2}{4} y^2 + y^4 \right\} \right\} dy = 0$$

$$\int_0^a \epsilon^2 \left\{ \frac{(2a)^4}{16} - \frac{6(2a)^2}{4} y^2 + y^4 \right\} dy = 0$$

$$0,041667(2a)^2 = \frac{\alpha_1}{2} - 0,0250(2a)^4 \alpha_2$$

$$0,002976 (2a)^2 = 0,0250 \alpha_1 - 0,005853 \alpha_2 (2a)^4$$

$$\alpha_2 = - \frac{0,193928}{(2a)^2} = - \frac{0,04848}{a^2}$$

$$\alpha_1 = 0,073638 (2a)^2 = 0,29455 a^2$$

de donde:

$$u^{(2)} = -\frac{1}{4}(x^2+y^2) + 0,073638(2a)^2 - \frac{0,193928}{(2a)^2}(x^4-6x^2y^2+y^4)$$

$$u^{(2)}(0,0) = 0,073638(2a)^2 = 0,29455 a^2$$

6.6.4. Método de los mínimos cuadrados en el contorno

Para minimizar $\int (\epsilon)^2 dS$ se hace, en el caso de una sola función de aproximación:

$$u^{(1)} = -\frac{1}{4}(x^2+y^2) + \alpha_1$$

$$\epsilon^{(1)} = u^{(1)}$$

$$\int_{x=-a}^a \left\{ -\frac{1}{4}(x^2+y^2) + \alpha_1 \right\}^2 dy = 0$$

$$\alpha_1 = 0,0833(2a)^2$$

$$u^{(1)} = -\frac{1}{4} x^2 - \frac{1}{4} y^2 + 0,0833(2a)^2$$

$$u^{(1)}(0,0) = 0,08333(2a)^2 = 0,3332 a^2$$

y coincide con el método de Galerkin.

6.7. EL METODO DE LA INTEGRAL DE CONTORNO DA RESULTADOS DE MENOR RIGIDEZ

La función solución cumple la ecuación diferencial y las condiciones de contorno.

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 1 = 0 \\ u = \bar{u}(s) \text{ en el contorno } A. \end{cases} \quad (6.1)$$

La función aproximada $v = v(x,y)$ cumple la ecuación diferencial homogénea $\nabla^2 v = 0$ y en el contorno toma un valor $v = \bar{v}(s)$ que no cumple las condiciones de contorno es decir $\bar{v}(s) \neq \bar{u}(s)$.

La función u solución hace mínima la expresión:

$$I(u) = \iint_A \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy$$

La función I define una distancia en el espacio de Hilbert de las funciones. Esa distancia es la que hay que minimizar entre u y v .

$$I(u-v) = \iint_A \left[\left\{ \frac{\partial(u-v)}{\partial x} \right\}^2 + \left\{ \frac{\partial(u-v)}{\partial y} \right\}^2 \right] dA =$$

$$I(u-v) = \iint_A \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dA + \iint_A \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] dA -$$

$$- 2 \iint_A \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right) dA$$

y aplicando el teorema de Green se tiene:

$$I(u-v) = I(u) - I(v) + 2 \oint_{\bar{A}} (\bar{v} - \bar{u}) \frac{\partial v}{\partial n} dS - 2 \iint_A (v-u) \nabla^2 v dA$$

como $\nabla^2 v = 0$ en todo A la segunda integral es 0 y queda:

$$I(u-v) = I(u) - I(v) + 2 \oint_{\bar{A}} (\bar{v} - \bar{u}) \frac{\partial v}{\partial n} dS \quad \{6.6\}$$

si $u=v$ $I(u) = I(v)$ e $I(u-v) = 0$

luego

$$2 \oint_{\bar{A}} (\bar{v} - \bar{u}) \frac{\partial v}{\partial n} dS = 0 \text{ ya que coinciden.}$$

Pero en el caso de que la función v sea aproxi-

mada lo que se hace es minimizar la diferencia en el contorno y se tiene:

$$\oint_{\bar{A}} (\bar{v}-\bar{u}) \frac{\partial v}{\partial n} dS = \oint_{\bar{A}} (\bar{v}-\bar{u}) dS \frac{\partial v}{\partial n} -$$

$$-\oint_{\bar{A}} \left[\oint_{\bar{A}} (\bar{v}-\bar{u}) dS \right] \frac{d}{dS} \left(\frac{\partial v}{\partial n} \right) dS$$

si lo que se hace es que $\oint_{\bar{A}} (\bar{v}-\bar{u}) dS = 0$ entonces:

$$\oint_{\bar{A}} (\bar{v}-\bar{u}) dS \frac{\partial v}{\partial n} = 0$$

$$y \quad I(u-v) = I(u) - I(v) \quad \{6.6\}$$

pero $I > 0$ por ser suma de cuadrados luego teniendo en cuenta {6.6} se tiene:

$$I(v) = I(u) - I(u-v)$$

$$I(v) < I(u)$$

Luego como se quería demostrar se aproxima por debajo del valor exacto.

6.8. COMPARACION DE LOS METODOS DE FUERZAS Y DE COMPATIBILIDAD

6.8.1. Método de los desplazamientos o de equilibrio

Las funciones aproximadas no cumplen la ecuación diferencial pero sí las condiciones de contorno. Se suponen los desplazamientos y se obliga al equilibrio.

La integral que sale es más alta y la aproximación está por encima del valor exacto. Hay mayor rigidez.

Si se supone el ejemplo de la figura 6.7 se tiene una matriz de 25×25 , triangular al resolver el sistema y hallar las funciones de forma.

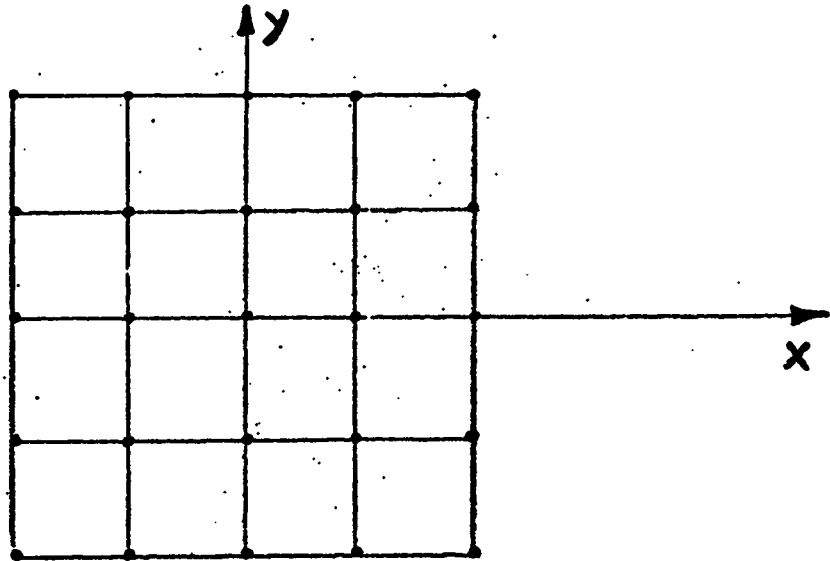


Figura 6.7

6.8.2. Método de las fuerzas o de compatibilidad

Las funciones aproximadas sí cumplen la ecuación diferencial pero no las condiciones de contorno. Se supo-

ne el equilibrio y se obliga a la compatibilidad.

La integral que sale es más baja y la aproximación está por debajo del valor exacto. Hay mayor flexibilidad.

Considerando el ejemplo de la figura 6.8 que es el paralelo al de la 6.7 pero en el método de las fuerzas se obtiene una matriz de 10 x 10 que en este caso es una matriz llena.

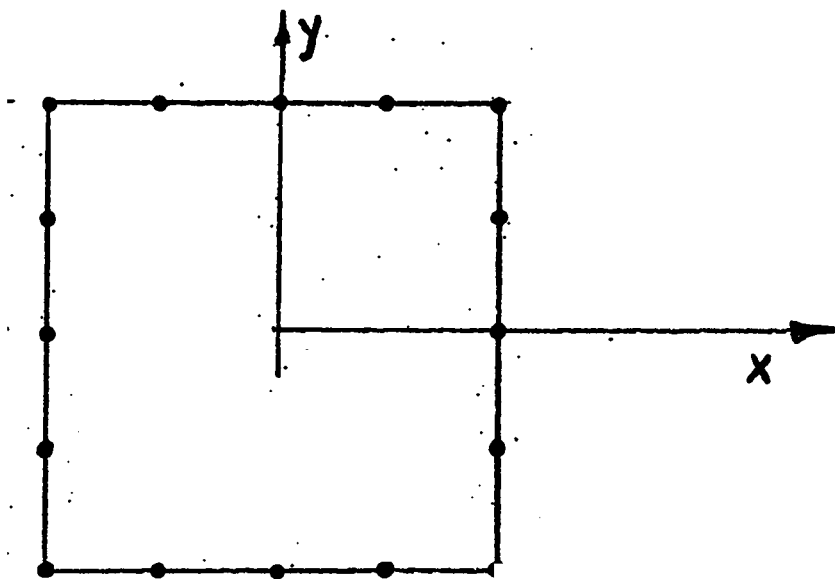


Figura 6.8

6.9. SOLUCION AL PROBLEMA DE LA TORSION MEDIANTE EL PLANTEAMIENTO VARIACIONAL EN EL CONTORNO

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 1 = 0 \\ u = 0 \quad \text{en} \quad x = \pm a \quad y = \pm a \end{cases}$$

Para plantear el problema en el contorno se hace el cambio:

$$u = u_0 + \bar{u} = -\frac{1}{4} (x^2 + y^2) + \bar{u}$$

de forma que queda la ecuación diferencial siguiente:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} = 0 \text{ en } A \\ \bar{u} = \frac{1}{4} (x^2 + y^2) \text{ a lo largo de } \bar{A} \end{cases}$$

Si se toma un solo término de aproximación se tiene:

$$\bar{u}^{(1)} = \alpha_1$$

$$\varepsilon^{(1)}(x, y) = \alpha_1 - \frac{1}{4} (x^2 + y^2)$$

$$\oint_{\bar{A}} \left\{ \alpha_1 - \frac{1}{4} (x^2 + y^2) \right\} \alpha_1 \, ds = 0$$

y se toma la función pesante α_1 en vez de $\frac{\partial \alpha_1}{\partial n} = 0$ que no daría ninguna aproximación.

$$2 \int_{-a}^a \left\{ \alpha_1 - \frac{1}{4} (a^2 + y^2) \right\} \alpha_1 \, dy = 0$$

$$2a\alpha_1 - \frac{4a^3}{6} = 0 \quad ; \quad \alpha_1 = \frac{a^2}{3}$$

$$u^{(1)} = -\frac{1}{4} (x^2 + y^2) + \frac{a^2}{3}$$

$$u^{(1)}(0,0) = 0,3333$$

En el caso de tomar dos funciones de aproximación se tiene:

$$\bar{u}^{(2)} = \alpha_1 + \alpha_2 (x^4 - 6x^2y^2 + y^4) = \alpha_1 + \alpha_2 u_1$$

$$\varepsilon^{(2)} = \alpha_1 + \alpha_2 (x^4 - 6x^2y^2 + y^4) - \frac{1}{4} (x^2 + y^2)$$

$$\oint_A \{ \alpha_1 + \alpha_2 (x^4 - 6x^2y^2 + y^4) - \frac{1}{4} (x^2 + y^2) \} \alpha_1 dS = 0$$

$$\oint_A \{ \alpha_1 + \alpha_2 (x^4 - 6x^2y^2 + y^4) - \frac{1}{4} (x^2 + y^2) \} \frac{\partial u_1}{\partial n} dS =$$

$$= \int_0^a \{ \alpha_1 + \alpha_2 (a^4 - 6a^2y^2 + y^4) - \frac{1}{4} (a^2 + y^2) \} \frac{\partial u_1}{\partial x} \Big|_{x=a} dy = 0$$

$$\begin{cases} \alpha_1 - \frac{4a^2}{5} \alpha_2 = \frac{a^2}{3} \\ 0 \cdot \alpha_1 + 1,3714 \alpha_2 = -0,0667 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha_1 = 0,2944 a^2 \\ \alpha_2 = \frac{-0,0486}{a^2} \end{cases}$$

$$u^{(2)} = -\frac{1}{4} (x^2 + y^2) + 0,2944 a^2 - \frac{0,0486}{a^2} (x^4 - 6x^2y^2 + y^4)$$

$$u^{(2)}(0,0) = 0,2944 a^2$$

6.9.1. Solución de Navier para distintos casos.

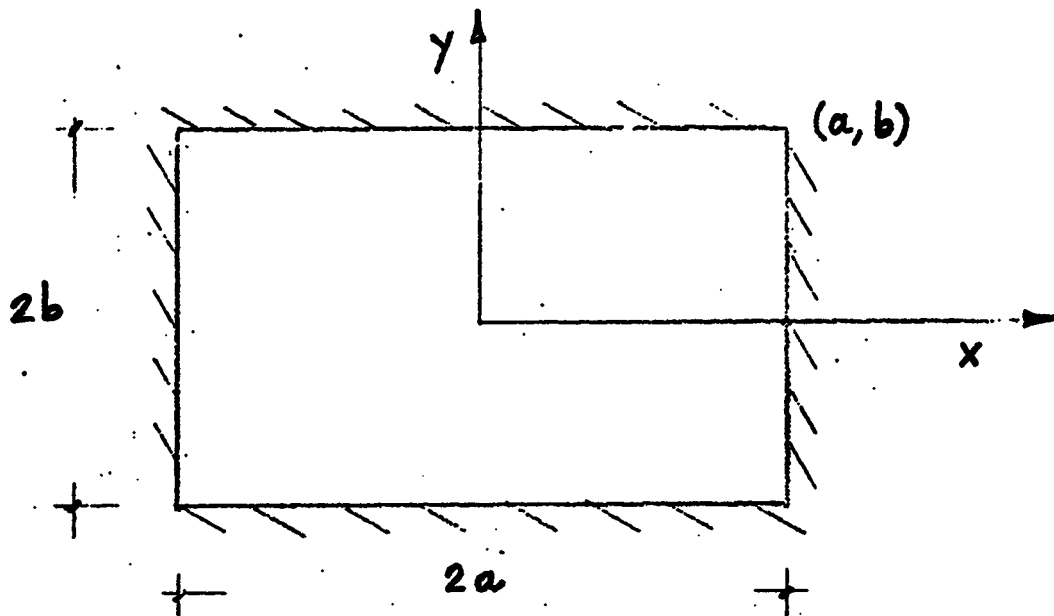


Figura 6.9

Si en la figura 6.9 se quiere resolver la ecuación de la torsión:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 1 = 0 \\ u = 0 \quad x = \pm a \quad y = \pm b \end{cases} \quad \{6.7\}$$

es decir para placa simplemente apoyada se tiene:

$$u = \text{sen } \frac{n \pi}{2a} x \text{ sen } \frac{m \pi}{2b} y$$

Para los casos de las figuras 6.10 y 6.11 se tie

ne:

$$u = \text{sen } \frac{n \pi}{2a} x \cos \frac{m \pi}{2b} y$$

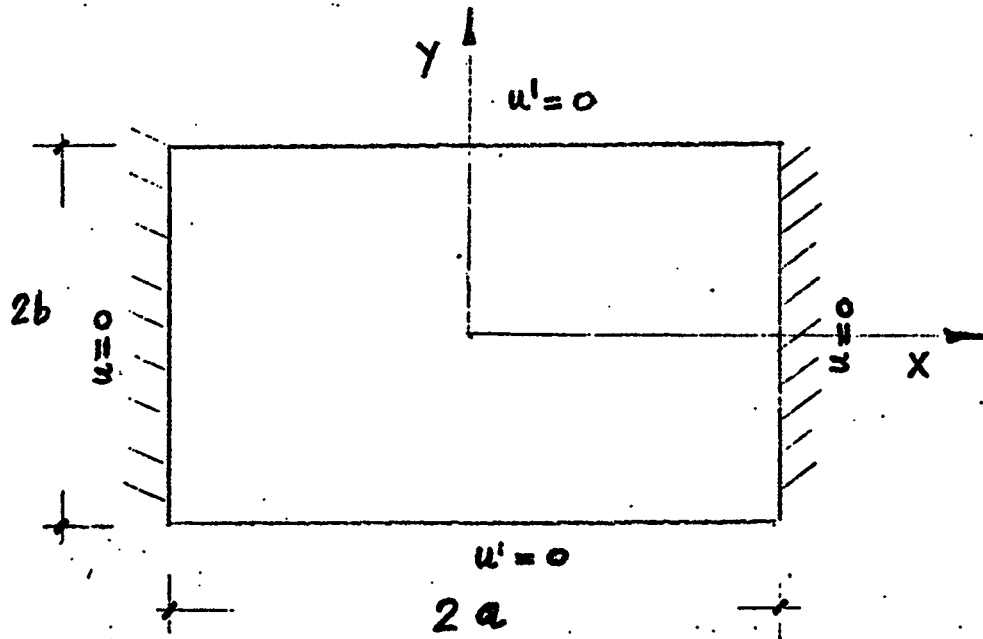


Figura 6.10

$$u = 0 \quad u = \text{sen } \frac{n \pi}{2a} x (1 - \cos \frac{2m}{2b} \pi y)$$

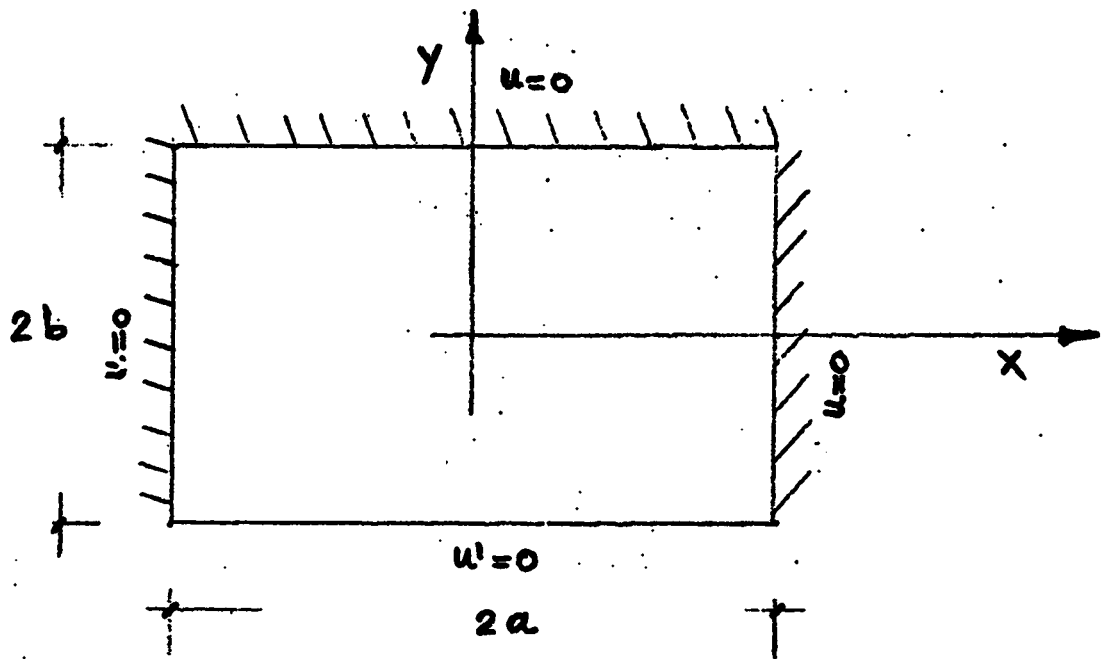


Figura 6.11

6.9.2. Método de Kantarovich

Es un método alternativo al de Levy pero utilizando cálculo variacional.

La resolución de la ecuación diferencial {6.7} es similar hallar la función que minimiza:

$$\left\{ \begin{array}{l} I(u) = \iint_A \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - 2u \right\} dx dy \\ u = 0 \quad x = \pm a \quad y = \pm b \end{array} \right. \quad \{6.8\}$$

Se propone una solución del tipo:

$$u^{(N)} = \sum_{i=1}^N U_i(x) X_i(x, y) \quad \{6.9\}$$

donde $X_i(x, y)$ son funciones conocidas a priori y que satisfacen las condiciones de contorno en $\begin{cases} y = f_1(x) \\ y = f_2(x) \end{cases}$ que en este

caso son $\begin{cases} y = -b \\ y = b \end{cases}$

$U_i(x)$ son funciones a determinar y deben de obligar a la función u a cumplir las condiciones de contorno en puntos de $\begin{cases} x = g_1(y) \\ x = g_2(y) \end{cases}$; en este caso en $\begin{cases} x = -a \\ x = a \end{cases}$ $u^{(N)}$ cumplirá más o menos

condiciones de contorno cuanto mayor sea el número de las $U_i(x) (N)$.

Si se entra en {6.8} con la función {6.9} queda:

$$I(U_i) = \iint_A \left[\left\{ \sum_{i=1}^N U_i' x_i + U_i' x_{i,x} \right\}^2 + \right. \\ \left. + \left\{ \sum_{i=1}^N U_i' x_{i,y} \right\}^2 - 2 \sum_{i=1}^N U_i' x_i \right] dx dy$$

si esta ecuación se puede integrar respecto de y, queda una integral de una sola dimensión mucho más fácil de resolver por técnicas normales del cálculo de variaciones o pasar a una ecuación diferencial aplicando Euler que para el caso de derivadas primeras es:

$$\frac{\partial F}{\partial U_i} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial U_i'} \right) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, N$$

y se tiene una ecuación diferencial de segundo orden en este caso:

$$N_1(x,y) \cdot U_i''(x) + N_2(x,y) \cdot U_i'(x) + N_3(x,y) \cdot U_i = 0$$

que hay que resolver para las N funciones. Se pueden utilizar métodos como los de Runge-Kutta o los sistemas aproximados que ya se han visto.

6.9.2.1. Aplicación al caso de placa apoyada rectangular

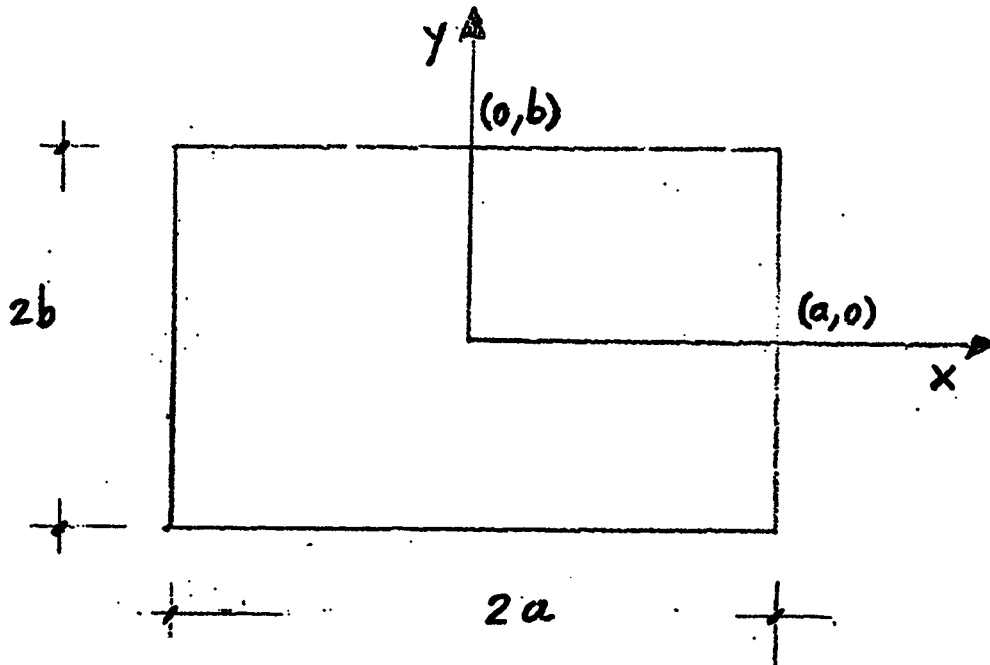


Figura 6.12

Determinar la función u que minimiza (6.8), con las condiciones de contorno

$$u = 0 \quad \text{en} \quad x = \pm a; \quad y = \pm b$$

Teniendo en cuenta la ecuación {6.8} se toma una sola aproximación:

$$u^{(1)} = u_1(x) (y^2 - b^2)$$

donde

$$y^2 - b^2 = 0 \quad \text{en} \quad y = \pm b$$

$$I(u_1) = \iint_A \{ u_1'(x) (y^2 - b^2) + u_1^2(x) (2y)^2 - 2u_1(y^2 - b^2) \} dx dy =$$

$$= \int_{-a}^a \left\{ \frac{16}{15} b^5 \left(\frac{du_1}{dx} \right)^2 + \frac{8}{3} b^3 u_1^2 + \frac{8}{3} u_1 \right\} dx$$

aplicando Euler $\left\{ \frac{\partial F}{\partial u_1} - \frac{d}{dx} \left(\frac{dF}{du_1} \right) = 0 \right\}$ se tiene:

$$\frac{32}{15} b^5 \frac{d^2 u_1}{dx^2} - \frac{16}{5} b^3 u_1 - \frac{8}{3} b^3 = 0$$

ecuación diferencial de coeficientes constantes con condiciones de contorno $u_1 = 0$ en $x = \pm a$

$$u_1^p = \frac{-1}{2b^2} \quad r^2 = \frac{5}{2b^2} \quad r = \pm \sqrt{\frac{5}{2}} \cdot \frac{1}{b}$$

$$u_1 = A \operatorname{Ch} \frac{x}{b} \sqrt{\frac{5}{2}} + B \operatorname{Sh} \frac{x}{b} \sqrt{\frac{5}{2}} - \frac{1}{2b^2}$$

y con las condiciones de contorno queda:

$$u_1 = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\operatorname{Ch} \alpha x}{\operatorname{Ch} \alpha} - 1 \right\} \quad \text{siendo} \quad \alpha = \sqrt{\frac{5}{2}} \frac{b}{a}$$

y entonces $u^{(1)}$ queda:

$$u^{(1)} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\operatorname{Ch} \alpha x}{\operatorname{Ch} \alpha} - 1 \right\} (y^2 - b^2)$$

para el caso $a = b$ se tiene:

$$u^{(1)}(0, 0) = 0,30261$$

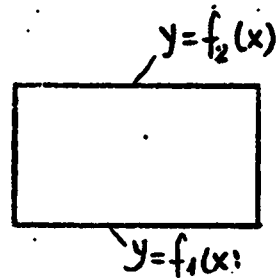
$$u^{(1)}(1/2, 1/2) = 0,17824$$

6.9.3 Método de Kantarovich en la ecuación diferencial de la torsión. Aplicación de Galerkin

Con este método el problema no tiene porqué ser autoadjunto, pero exige la existencia de derivadas mayores.

Si el problema es:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2 \\ \text{c.c} \end{cases}$$



Se plantea la solución:

$$u^{(N)} = \sum_{i=1}^N U_i(x) X_i(x, y)$$

y con una función error se aplica el método de colocación, regiones, Galerkin o mínimos cuadrados. Aquí se utiliza - Galerkin:

$$\begin{aligned} \varepsilon(x, y) &= \sum_{i=1}^N \{ (U_i'' X_i + U_i X_{i,xx}) + U_i X_{i,yy} \} - 2 \\ \iint_A \varepsilon(x, y) X_i(x, y) U_i(x) dx dy &= 0 \quad (i=1, 2, \dots, N) \quad \{6.10\} \end{aligned}$$

$$\int_a^b U_i(x) \left\{ \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} \varepsilon(x, y) X_i(x, y) dy \right\} dx = 0 \quad (i=1, 2, \dots, N)$$

Como se ha de cumplir para todo $U_i(x)$ (arbitraria) se debe de cumplir:

$$\int_{f_1(x)}^{f_2(x)} \varepsilon(x, y) X_i(x, y) dy = 0 \quad \{6.11\}$$

y quedan, para un n fijo, ecuaciones del tipo:

$$\sum_{i=1}^N \left\{ U_i''(x) \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} X_i X_n dy + U_i(x) \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} X_{i,xx} X_n dy + \right. \\ \left. + U_i \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} X_{i,yy} X_n dy - 2 X_n \right\} = 0 \quad (i=1,2,\dots,N)$$

De esta forma no ha habido que utilizar Euler para resolver la ecuación {6.10}.

6.9.3.1 Cálculo de una placa rectangular por el método de Kantarovich en la ecuación de la torsión

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 1 = 0 \\ u = 0 \quad \text{en} \quad x = \pm a \quad x = \pm b \end{cases}$$

Con una sola función de aproximación se tiene:

$$u^{(1)} = U_1(x) (y^2 - b^2) \\ \epsilon^{(1)}(x,y) = U_1''(y^2 - b^2) + 2 U_1 + 1$$

pesando el error según Galerkin se tiene:

$$\int_{-b}^b \{ U_1''(y^2 - b^2) + 2 U_1 + 1 \} (y^2 - b^2) dy = 0$$

y resulta la ecuación diferencial:

$$\frac{16}{15} b^5 u_1'' - \frac{8}{3} b^3 u_1' - \frac{4}{3} b^3 = 0$$

idéntica al caso variacional ya que el problema es autoadjunto. La solución es, pues:

$$u^{(1)} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\text{Ch } \alpha x}{\text{Ch } \alpha} - 1 \right\} \cdot (y^2 - b^2) \quad \text{siendo } \alpha = \sqrt{\frac{5}{2}} \cdot \frac{b}{a}$$

Si se toman dos funciones de aproximación se tiene:

$$u^{(2)} = U_1(x) (y^2 - b^2) + U_2(x) y^2 (y^2 - b^2)$$

Se ha tomado esta función pues el problema es simétrico. Se utilizan polinomios pero también se pueden usar otro tipo de funciones como las de Rayleigh.

$$\epsilon^{(2)}(x, y) = (y^2 - b^2) U_1'(x) + y^2 (y^2 - b^2) U_2'(x) + 2U_1 + (12y^2$$

1

imponiendo las condiciones {6.11} se tiene:

$$\int_{-b}^b \epsilon^{(2)}(x, y) \begin{bmatrix} y^2 - b^2 \\ y^2 (y^2 - b^2) \end{bmatrix} dy = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

que resuelta da:

$$(D^2 - \frac{5}{2})U_1 + \frac{1}{7} (D^2 - \frac{7}{2})U_2 - \frac{5}{4} = 0$$

$$\frac{1}{7} (D^2 - \frac{7}{2})U_1 + \frac{1}{21} (D^2 - \frac{33}{2})U_2 - \frac{1}{4} = 0$$

como se ve hay simetría en el sistema ya que el problema es autoadjunto.

Como los coeficientes son constantes tomando $U = \text{cte}$ salen como soluciones particulares:

$$U_1 = -\frac{1}{2}$$

$$U_2 = 0$$

y el resultado final es:

$$U_1 = A_1 \text{Ch } \alpha_1 x + B_1 \text{Sh } \alpha_1 x + C_1 \text{Ch } \alpha_2 x + D_1 \text{Sh } \alpha_2 x - \frac{1}{2}$$

$$U_2 = A_2 \text{Ch } \alpha_1 x + B_2 \text{Sh } \alpha_1 x + C_2 \text{Ch } \alpha_2 x + D_2 \text{Sh } \alpha_2 x + 0$$

imponiendo las condiciones de contorno:

$$x = \pm a \quad U_1 = U_2 = 0$$

queda:

$$U_1 = 0,51558 \frac{\text{Ch } \alpha_1 x}{\text{Ch } \alpha_1} - 0,01558 \frac{\text{Ch } \alpha_2 x}{\text{Ch } \alpha_2} - \frac{1}{2}$$

$$u_2 = - \frac{0,1140}{b^2} \left(\frac{\text{Ch } \alpha_1 x}{\text{Ch } \alpha_1} - \frac{\text{Ch } \alpha_2 x}{\text{Ch } \alpha_2} \right)$$

en el caso de que $a = b$

	<u>Solución aproximada</u>	<u>Solución exacta</u>
$u^{(2)}(0,0) =$	0,294723	0,294265
$u^{(2)}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) =$	0,1813834	

en el caso de que $a = 2b$

	<u>Solución aproximada</u>	<u>Solución exacta</u>
$u^{(2)}(0,0) =$	0,455518	0,45549
$u^{(2)}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) =$	0,29586	0,29501

6.9.3.2 Cálculo de una placa trapezoidal por el método de Kantarovich en la ecuación de la torsión

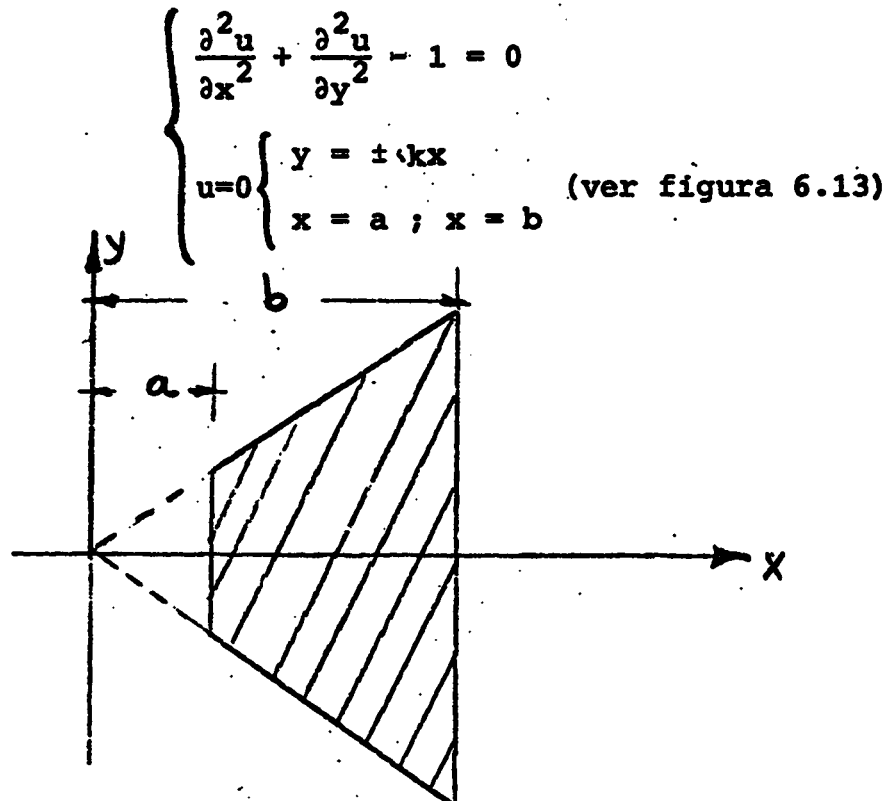


Figura 6.13

Si se toma un solo término de aproximación se tiene:

$$u^{(1)} = (y^2 - k^2 x^2) U_1(x)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon^{(1)}(x, y) &= (y^2 - k^2 x^2) U_1' + 8k^2 x(y^2 - k^2 x^2) U_1' + \\ &+ 4k^2(y^2 - 3k^3 x^2) U_1 + 2U_1 - 1 \end{aligned}$$

Aplicando la ecuación {6.11} se tiene:

$$\int_{-kx}^{kx} \varepsilon(x, y) (y^2 -$$

y el resultado es:

$$x^2 \frac{d^2 U_1}{dx^2} + 5x \frac{dU_1}{dx} + \frac{5(k^2 - 1)}{2k^2} U_1 = \frac{5}{4k^2} \quad \{6.12\}$$

que es una ecuación de Euler, en la que si se hace el cambio $x = e^t$ queda convertida en una de coeficientes constantes, y la solución es del tipo $u_1 = (e^t)^m = x^m$.

$$U_1 = x^m$$

$$\frac{dU_1}{dx} = m x^{m-1}$$

$$\frac{d^2 u_1}{dx^2} = m(m-1)x^{m-2}$$

Los valores de m son las raíces de la ecuación:

$$m(m-1) + 5m + 5 \frac{(k^2-1)}{2k^2} = 0$$

$$m_1 = -2 + \sqrt{\frac{3k^2+5}{2k^2}}$$

$$m_2 = -2 - \sqrt{\frac{3k^2+5}{2k^2}}$$

de donde resulta:

$$u_1 = C_1 x^{m_1} + C_2 x^{m_2} + \frac{1}{2(k^2-1)} \quad (k \neq 1)$$

donde $\frac{1}{2(k^2-1)}$ es una solución particular.

Para $k=1$ se obtiene:

$$u_1 = C_1 + 2 \frac{C_2}{x^4} + \frac{5}{16} \ln x$$

Las condiciones de contorno son:

$$\left. \begin{array}{l} x = a \\ x = 1 \end{array} \right\} u_1 = 0$$

Si se toma $a = 0$ hay singularidades.

$$u^{(1)} = \frac{(y^2 - k^2 x^2)}{2(k^2 - 1) \{a^{m_2} - a^{m_1 - 2(k^2 - 1)}\}} \{ (1 - a^{m_2}) x^{m_1} + (a^{m_1 + 2k^2 - 3})^{m_2} \}$$

Si $a=0$

$$u^{(1)} = \frac{y^2 - k^2 x^2}{2(k^2 - 1)} \{1 - (\frac{x}{b})^{m_1}\}$$

$$\text{Si } k = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$u^{(1)} = \frac{3}{4} (1 - \frac{x}{b}) (y^2 - \frac{k^2}{3}) \text{ solución exacta.}$$

Si no se pudiera resolver la ecuación {6.12} - exactamente se podrían utilizar métodos como Runge-Kutta, Galerkin, etc..., pero con la ventaja de saber hallar una solución particular.

Si se utilizan dos funciones de aproximación se tiene:

$$u^{(2)} = (y^2 - k^2 x^2) U_1(x) + y^2 (y^2 - k^2 x^2) U_2(x)$$

pero es una solución más complicada que resolver la ecuación diferencial directamente. En este caso se hace para una rectángulo pero aplicando una nueva técnica:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 1 = 0$$

Condiciones de contorno:

$$u = 0 \quad \begin{cases} x = \pm a \\ y = \pm b \end{cases}$$

Se toma la función:

$$u^{(2)} = (y^2 - b^2)u_1 + y^2(y^2 - b^2)u_2$$

Se hallar el error:

$$\begin{aligned} \epsilon^{(2)}(x, y) &= (y^2 - b^2)u_1' + y^2(y^2 - b^2)u_2' + 2u_1 + \\ &+ 2(6y^2 - b^2)u_2 + 1 \neq 0 \end{aligned}$$

Al existir simetría lo que ocurre en b es idéntico en $-b$. Haciendo cero en $y=b$ (contorno) se tiene $\epsilon^{(2)}(x, b) = 2u_1 + 10b^2 u_2 + 1 = 0$ que da como resu

$$u_2 = \frac{2u_1 + 1}{10}$$

De este modo se ha reducido el problema de u_1 y u_2 a u_1 y se puede aplicar Galerkin con una sola aproximación:

$$\int_{-b}^b \epsilon^{(2)}(x, y) (y^2 - b^2) dy = 0$$

y resulta:

$$16,142 U_1'' - \frac{39,188}{b^2} U_1 + \frac{1559}{b^2} = 0$$

de donde se tiene:

$$U_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{\text{Ch } \alpha x}{\text{Ch } \alpha a} - 1 \right)$$

$\alpha = \frac{1,5518}{b}$ una vez impuestas las condiciones de contorno para $x = \pm a$.

Como U_2 es función de U_1 queda:

$$u^{(2)} = \frac{1}{10b^2} (y^2 - 6b^2 y^2 + 5b^4) \frac{\text{Ch } \alpha x}{\text{Ch } \alpha a} + (y^4 - b^2 y^2)$$

Para $a=b$ se tiene:

$$u^{(2)}(0,0) = 0,298402$$

$$u^{(2)}(1/2, 1/2) = 0,185523$$

6.9.4 Método de Kantarovich. Aplicación del método de colocación por líneas

Se considera una función:

$$u^{(N)} = \sum_{i=1}^N u_i(x) X_i(x,y)$$

Las funciones $X_i(x,y)$ satisfacen las condiciones de contorno a lo largo de $\begin{cases} y = f_1(x) \\ y = f_2(x) \end{cases}$ de la figura 6.14.

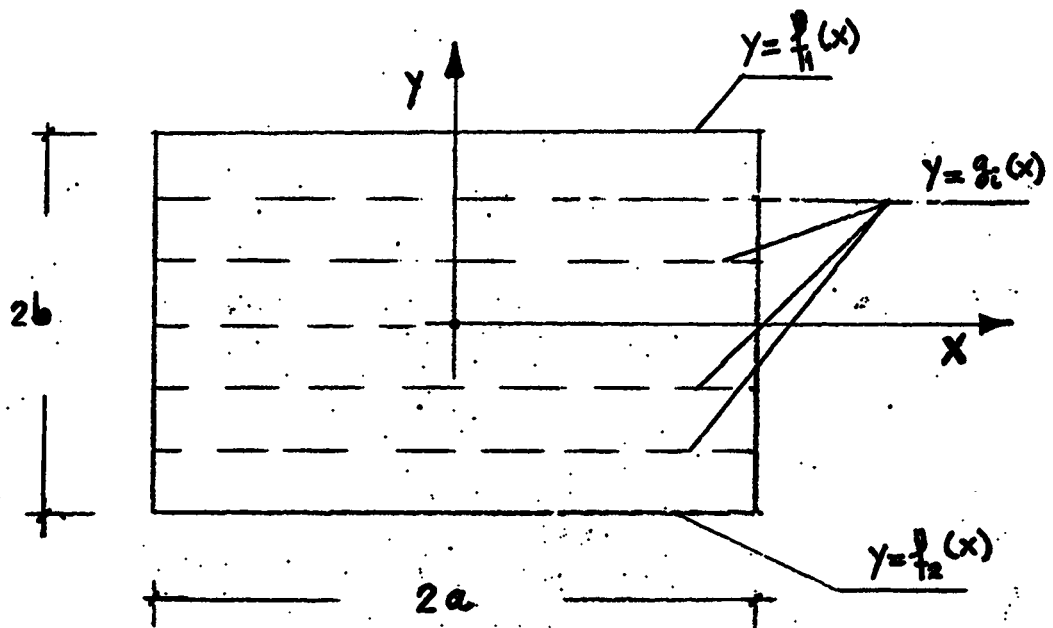


Figura 6.14

Lo que se hace es anular el error a lo largo de $y = g_1(x), y = g_2(x) \dots y = g_N(x)$.

$$\int_{-a}^a \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} \{ \epsilon(x,y) \delta(g_1(x)) dy \} dx = 0$$

donde δ es la delta de Dirac.

6.9.4.1 Aplicación a la ecuación de torsión

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 1 = 0 \\ u = 0 \begin{cases} x = \pm a \\ y = \pm b \end{cases} \end{cases}$$

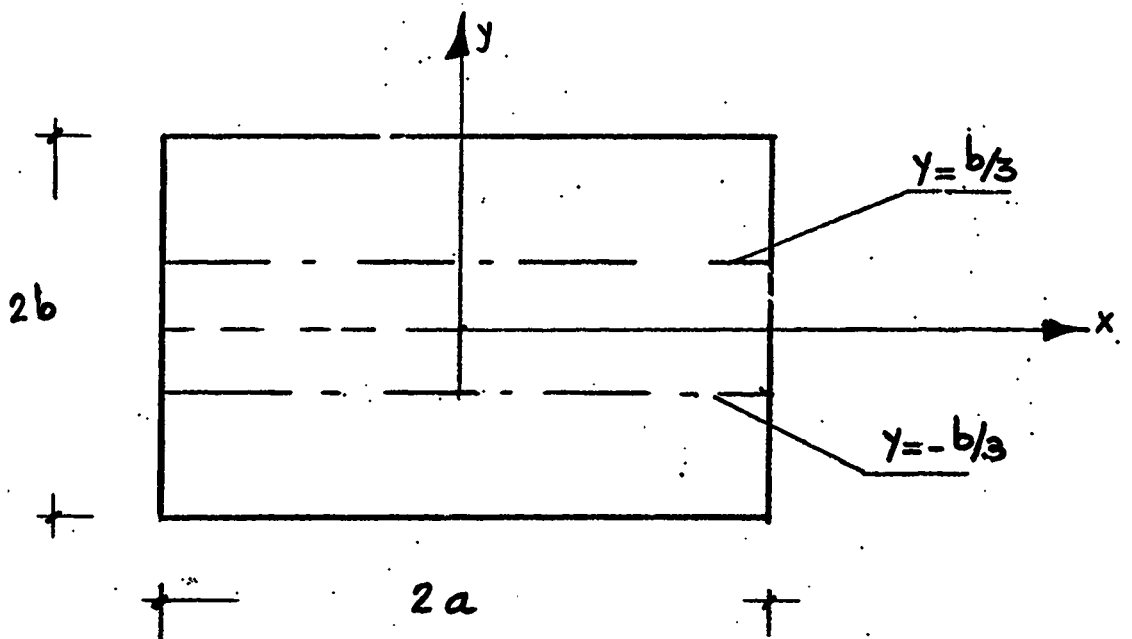


Figura 5.15

Para el caso de una sola función de aproximación se tiene:

$$\begin{aligned} u^{(1)} &= (y^2 - b^2) u_1(x) \\ \varepsilon^{(1)}(x, y) &= (y^2 - b^2) u_1' + 2u_1 + 1 \end{aligned} \quad \{6.13\}$$

Se hace cero el error en $y=0$:

$$\frac{d^2 u_1}{dx^2} - \frac{2}{b^2} u_1 - \frac{1}{b^2} = 0$$

La solución es:

$$U_1 = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\text{Ch } \sqrt{2} \frac{x}{b}}{\text{Ch } \sqrt{2} \frac{a}{b}} - 1 \right\}$$

No es buena solución. Para mejorarla se anula el error en $y = \frac{b}{3}$ (por simetría también se anulará en $y = -\frac{b}{3}$), con lo que se obtiene una mejor aproximación.

$$\frac{d^2 U_1}{dx^2} - \frac{9}{4b^2} U_1 - \frac{9}{8} = 0$$

$$U_1 = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\text{Ch } 1,5 \frac{x}{b}}{\text{Ch } 1,5 \frac{a}{b}} - 1 \right\}$$

Si se quisiera aproximar con más funciones se tomarían rectas como $y = \frac{b}{3}$ e $y = \frac{2b}{3}$ en el caso de dos funciones de aproximación.

6.9.5 Método de Kantarovich. Aplicación del método de las regiones

Al igual que siempre se considera:

$$u(N) = \sum_{1}^N U_1(x) \quad X_1(x, y)$$

donde las funciones $X_1(x, y)$ satisfacen las condiciones de

contorno a lo largo de $\begin{cases} y = f_1(x) \\ y = f_2(x) \end{cases}$ de la figura 6.16.

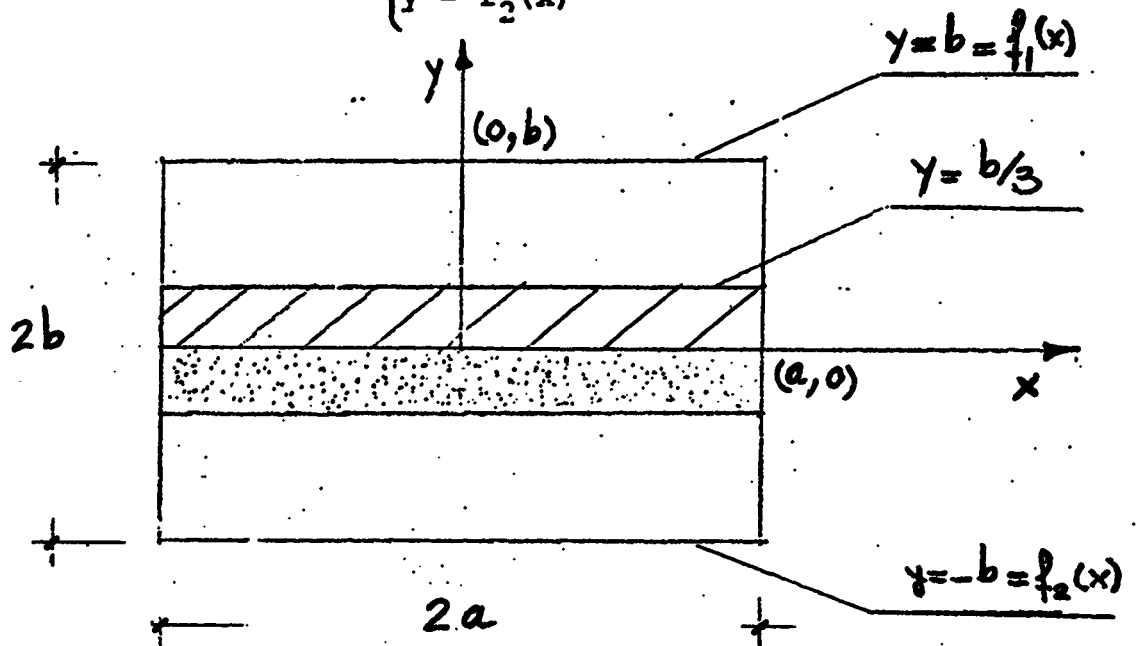


Figura 6.16

Se obliga a que el error una región sea cero. Por ejemplo en la figura 6.16 la zona rayada. Por simetría se cumple también en la zona punteada.

$$\iint_A \varepsilon^{(N)}(x, y) dx dy = 0$$

6.9.5.1 Aplicación a la ecuación de la torsión

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 1 = 0$$

$$u = 0 \begin{cases} x = \pm a \\ y = \pm b \end{cases}$$

$$u^{(1)} = (y^2 - b^2) u_1(x)$$

$$\varepsilon^{(1)} = (y^2 - b^2) u_1'' + 2u_1 + 1$$

$$\begin{aligned} \iint_A (y^2 - b^2) u_1'' + 2u_1 + 1 &= \\ &= \int_{-a}^a dx \int_0^{b/3} \{ (y^2 - b^2) u_1'' + 2u_1 + 1 \} dy = \\ &= \int_{-a}^a \left\{ -\frac{26}{81} b^3 u_1'' + (2u_1 + 1) \frac{b}{3} \right\} dx = 0 \end{aligned}$$

si $-\frac{26}{81} b^3 u_1'' + (2u_1 + 1) \frac{b}{3} = 0$ se cumple la condición:

$$u_1'' - \frac{27}{13} \frac{1}{b^2} u_1 - \frac{27}{26b^2} = 0$$

si

$$r_1 = + \frac{1}{b} \sqrt{\frac{27}{13}}$$

$$r_2 = - \frac{1}{b} \sqrt{\frac{27}{13}}$$

$$u_1 = \frac{\text{Ch } r_2 a}{\text{Ch } 2r_1 a} e^{r_1 x} + \frac{\text{Ch } r_1 a}{\text{Ch } 2r_2 a} e^{r_2 x} - \frac{1}{2}$$

6.9.6 Método de Kantarovich. Aplicación de otros métodos

Se puede aplicar igualmente el método de las diferencias finitas al igual que los anteriores.

En realidad lo que se trata de resolver en muchos casos es un problema del tipo:

$$\ddot{\underline{U}} + \underline{A} \dot{\underline{U}} + \underline{B} \underline{U} = \underline{C}$$

que es un sistema de ecuaciones diferenciales. Para ello se suele utilizar la técnica de "Progresión Matricial".

PUBLICACIONES DEL DEPARTAMENTO DE ANALISIS DE LAS ESTRUCTURAS.
CATEDRA DE CALCULO DE ESTRUCTURAS.

- Cálculo convencional de estructuras. Problemas.

Avelino Samartín, J.R. González de Cangas, Luís Moreno y Javier Torres.

246 páginas (AE-79.1)

- Cálculo de estructuras elásticas geoméricamente no lineales.

Avelino Samartín.

62 páginas (AE-79.2)

- La viga columna.

Avelino Samartín.

54 páginas (AE-79.3)

- Cálculo matricial de estructuras. Problemas.

Avelino Samartín, J.R. González de Cangas, Luís Moreno y Javier Torres.

226 páginas (AE-80.1)

- Un programa de generación automática de datos para el cálculo de emparrillados planos. (GEDE).

Fernando Martínez y Avelino Samartín.

135 páginas (AE-80.2)

- Teoría elemental de vigas alabeadas. Aplicación a la viga - balcón circular.

Avelino Samartín y J.R. González de Cangas.

36 páginas (AE-80.3)